Teorie

Matematică

ATINGE EXCELENTA
DACO®

Clasa a $\overline{IX}$ a →

Notații:

a.î. = astfel încât

$\forall$ = oricare

$\exists$ = există

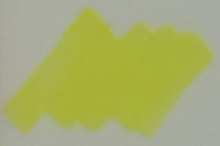
$\measuredangle$ = unghi

- observații

- subpuncte/teoreme

Th = teoremă

Obs = observație

 - titlu/important

Serediuc
Mihaela

Fisa 1: Formule de calcul prescurtat

Sume

I Formule de calcul prescurtat

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

II Sume

① $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

② $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

④ Suma în progresia aritmetică

$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$

⑤ Suma în progresia geometrică

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

III Medii

Media aritmetică: $M_a = \frac{a+b}{2}$

Media geometrică: $M_g = \sqrt{a \cdot b}$

Media armonică: $M_h = \frac{2ab}{a+b}$

$M_h \leq M_g \leq M_a$

Ex:

$x^{y^3} = x^{3 \cdot y}$

$\frac{1}{x^{-3}} = x^{-3}$

$x^{\frac{1}{y}} = \sqrt[y]{x}$

Fișa 2: Ecuația de grad II

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

① Formula de rezolvare

- $\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

② Natura rădăcinilor ecuației de grad II

- Natura se referă la tipul rădăcinii: reală sau nu
- Natura este dată semnul lui Δ

I $\Delta > 0 \Rightarrow$ răd reale diferite

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 \neq x_2$

II $\Delta = 0 \Rightarrow$ răd reale egale

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_1 = x_2$

III $\Delta < 0 \Rightarrow$ răd care nu sunt reale

$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

Obs: Condiția ca o ecuație de grad II să admită răd $\in \mathbb{R}$

$\Delta \geq 0$

③ Relații între rădăcini și coeficienți

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ S

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ P.

Descompuneri utile:

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$

$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

④ Formarea ec de gr II când se cunosc rădăcinile

- Folosim formula: $x^2 - Sx + P = 0$

unde $S = x_1 + x_2$

$P = x_1 \cdot x_2$

⑤ Descompunerii în factori

- Folosim formula: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

unde x_1, x_2 sunt rădăcini

⑥ Semnul rădăcinilor ec de g^{II}

- Studiem semnul acestora în cazul rădăcinilor ($\Delta \geq 0$)

- Semnul este dat de semnul

produsului și semnul sumei

I Dacă $P>0$, rădăcinile au același semn (semnul sumei)

II Dacă $P=0$, o răd $=0$, cealaltă are semnul sumei

III Dacă $P<0$, răd au semne ≠

Obs: Condiții:

1) Rădăcini pozitive: $\Delta \geq 0$, $P>0$, $S>0$

2) Rădăcini negative: $\Delta \geq 0$, $P>0$, $S<0$

3) Rădăcini de același semn: $\Delta \geq 0$, $P>0$

4) Rădăcini de semn opus: $\Delta > 0$, $P<0$

5) Rădăcini opuse: $\Delta > 0$, $P<0$, $S=0$

6) Rădăcini inverse: $\Delta > 0$, $P=1$

Fisa 3: Progresie

I Progresia aritmetică

① Def: Progresia aritmetică = șirul în care fiecare termen, începând cu al 2-lea se obține din precedent prin adăugarea rației

$$a_{k+1} = a_k + r \quad r \neq 0$$

Obs: 1) Diferența a 2 termeni consecutivi este const = r

$$a_{k+1} - a_k = r \quad \forall k \geq 1$$

2) Pentru a demonstra că un șir este progresie aritmetică verificăm dacă diferența a 2 termeni consec este constantă

$$a_{n+1} - a_n = \text{const}$$

② Formula termenului general

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

③ Condiția de progresie aritmetică

a, b, c cp art => $b = \frac{a+c}{2}$

④ Suma primilor n termeni în p a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}$$

II Progresia geometrică

① Def: Prog geo = șirul în care fiecare term începând cu al 2lea se obține din precedent prin înmulțirea cu același nr q

$$b_{k+1} = b_k \cdot q$$ $q \neq 0$ $q \neq 1$ $b_1 \neq 0$

Obs: 1) raportul a 2 termeni consecutivi este q

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = q$$

②

2) Un sir este proggeo dacă raportul a 2 term consec este constant

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = const$$

② Formula t general

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

③ Condiția de prog geo

a, b, c p geometrică => $b = \sqrt{ac}$

④ Suma primilor n termeni din pg

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Fișa 4: Funcția de gradul I

① **Definiție:** O funcție ~~f def~~ pe R cu val în R, prin $f(x) = ax+b$, $a \neq b$, și $a, b \in R$, se numește funcție de grad I

② **Monotonie** – crescătoare
– descrescătoare

I Dacă $a > 0 \Rightarrow f$ strict cresc.

II Dacă $a < 0 \Rightarrow f$ strict descresc

③ **Semnul funcției de grad I**

– Regula de semn:

Funcția de grad I este 0 în rădăcină, are semn contrar lui a până la răd, și semnul lui a după răd.

Tabel de semn

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f(x)		semn contrar a	0	semnul lui a	

Ex: $f(x) = 2x - 3$

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ Tabel

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$- - -$	0	$+ + + +$	

$f(x) < 0 \quad x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$

4) Graficul funcției de grad I

- G_f = o dreaptă
- Intersecția cu axele de coord.

$G_f \cap Ox \begin{cases} y = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \quad (-\frac{b}{a}, 0)$

$G_f \cap Oy \begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) = b \end{cases} \quad (0, b)$

Obs: Condiția ca un punct A de coord (x_A, y_A) să aparț. graficului G_f este: $f(x_A) = y_A$

$A(x_A, y_A) \in G_f \overset{dacă}{\Rightarrow} f(x_A) = y_A$

2) Obs: Condiția ca să aflăm punctul de intersecție a graficului a 2 funcții – rezolvăm sist. format din ecuațiile celor 2 funcții

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad G_f \cap G_g$$

5) Inecuația de grad I

$ax + b > 0$ rezolvare

$ax > -b$

I dacă $a > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$ (se păstrează sensul inegalității)

II $a < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$ (se schimbă sensul inegalității)

Ex: I $2x - 4 \leq 0$

$2x \leq 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$

II $-3x + 1 \geq 0$

$-3x \geq -1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{3}]$

⑥ Semnul unei fracții

$\frac{2x-3}{4x+1} > 0$ Rezolvare ④

① rezolvăm ec de la numitor și numărător

② Tabel de semn pt nr, num și fracție

③ Alegem din tabel intervale care verifică condiția

!Obs: Regulă:

1) Dacă nr = 0 => fracția = 0

2) Dacă num = 0 => fracția nu are sens, în tabel punem bară

3) ~~Dacă~~ + cu + = +, + cu − = −, − cu − = + (Regula semnelor de la împărțire)

$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$- - - - - - -$		$- - -$	0	$+ + +$	
$4x+1$		$- - - -$	0	$+ + +$		$+ +$	
$\frac{2x-3}{4x+1}$		$+ + +$	/	$-$	0	$+ + +$	

$x \in (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

7. Ecuatia de grad I

$ax + b = 0, \quad a \neq 0$

Rezolvare

$ax = -b$

$x = \frac{-b}{a}$

Fișa 5: Funcții: Lecturi grafice

① Definiția funcției

Date 2 mulțimi A, B și un procedeu prin care fiecărui element din A facem să îi corespundă un singur element din B am definit o funcție de la A la B

$f: A \to B \qquad y = f(x)$

Obs: O funcție se caracterizează prin:

I Domeniul de definiție = mulțimea în care ia valori argumentul x

II Codomeniul = mulțimea în care ia valori funcția

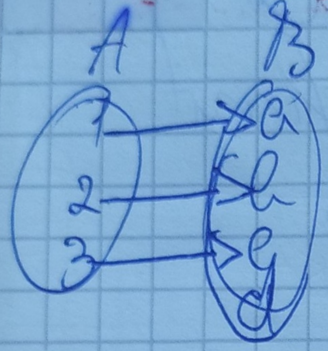
III Legea de corespondență = procedeul prin care se face asocierea.

② Moduri de definire

I. Sintetic - diagramă
- tabel

II. Analitic - una sau mai multe formule

Ex: Diagramă



Tabel:

x	1	2	3
$f(x)$	a	b	c

$G_f = \{(1, a)(2, b)(3, c)\}$

Analitic: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in (-\infty, 2) \\ 1-3x, & x \in [2, \infty] \end{cases}$

③ Funcție numerică

$f: A \to B$ este numerică dacă A, B = mulțimi nr

④ Graficul unei funcții

Prin graficul f înțelegem o mulțime de perechi de formă $(x, f(x))$ cu $x \in A$

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

!Obs importantă:

Condiția ca un punct $A(x_A, y_A)$ să aparțină graficului funcției f este $f(x_A) = y_A$

Deci $A(x_A, y_A) \in G_f$ dacă $f(x_A) = y_A$

5) Funcții egale

$f: A \to B$ $g: C \to D$ sunt = dacă

$$\begin{cases} A = C \\ B = D \\ f(x) = g(x), \forall x \in A \end{cases}$$

6) Funcții pare, funcții impare

Fie $f: A \to B$ și A = mulțime simetrică Ex: $A = (-3, 3)$

I f pară dacă $f(-x) = f(x)$

II f impară dacă $f(-x) = -f(x)$

- pentru a studia paritatea se calculează $f(-x)$

7 Funcții periodice

$f:A \to B$ periodică $\exists T \in \mathbb{R}^*$ cu prop $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in A$

T = perioadă

- f periodică = valorile se repetă după cât este T

8 Funcții monotone

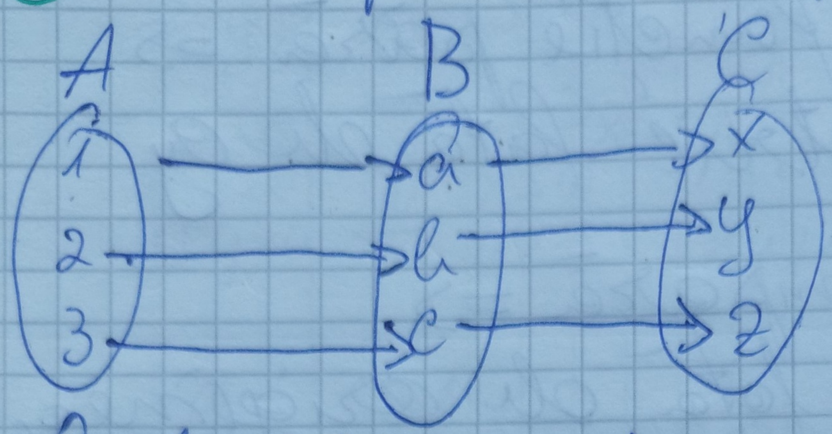
- $f:A \to B$ strict monotonă dacă este strict cresc / strict descresc
- $f:A \to B$ strict cresc dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $f:A \to$ strict discresc dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

9 Numărul funcțiilor care se pot determina de la A la B

Dacă $f:A \to B$ și A = a elemente
B = b elemente

Nr funcțiilor $:A \to$ este $= b^a$

(10) Compunerea funcțiilor



$f: A \to B \quad g: B \to C$

Def: Dacă $f: A \to B$ și $g: B \to C$ atunci există $g \circ f: A \to C$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ex: $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 1 - x^2$ $\quad f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \cdot g - 3 = 2(1 - x^2) - 3 =$
$= 2 - 2x^2 - 3 = -2x^2 - 1$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - f^2 = 1 - (2x-3)^2$
$= 1 - (4x^2 - 12x + 9) = 1 - 4x^2 + 12x - 9$
$= -4x^2 + 12x - 8$

Obs: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

11) Observații importante

1) Dacă f - funcție pară =>
=> ~~gf~~ Gf simetric față de Oy

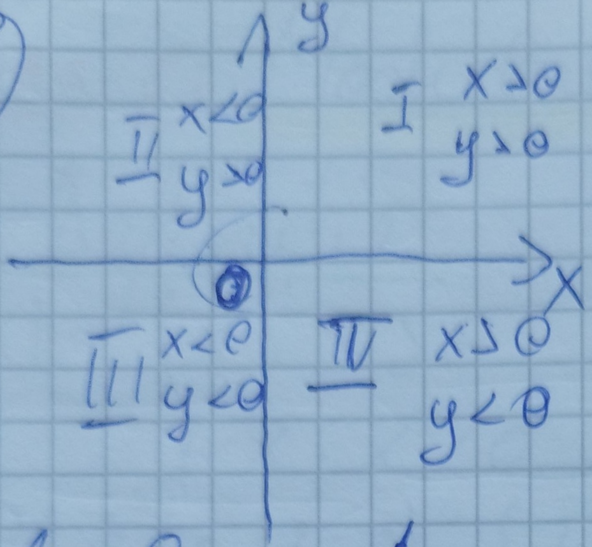
2) Dacă f - impară =>
Gf simetric față de originea axelor

3) Dreapta $x = a$ este axă de simetrie a graficului dacă
$f(x) = f(2a - x)$

4) Punctul P de coord (a, b) este centrul de simetrie a ~~graf~~ Gf dacă
$f(x) + f(2a - x) = 2b$

5) Funcții mărginite:
$f: A \to B$ marg dacă $\exists\ m, M \in \mathbb{R}$
a.î. $m \leq f(x) \leq M$
sau
$f(x) \in [m, M]$

(6)



$M \in Ox$ dacă $y_M = 0$

$M \in Oy$ dacă $x_M = 0$

Axele de coordonate:

1. Axa Ox are ecuația $y = 0$
2. Axa Oy are ecuatia $x = 0$

Fișa 6: Modulul unui nr $\in \mathbb{R}$

1) Definiție

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Obs!: $|E(x)| = \begin{cases} E(x) \geq 0 \\ -E(x) < 0 \end{cases}$

Ex: $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & 2x-3 \geq 0, \; x \geq \frac{3}{2} \\ -2x+3, & 2x-3 < 0, \; x < \frac{3}{2} \end{cases}$

2) Proprietăți ale modulului

1) $|x| \geq 0, \; \forall x \in \mathbb{R}$

2) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$

Ex: $|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

3) Ecuații cu moduli

Tipuri:

I $|x-2| = 5 \Rightarrow x-2 = \pm 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 5 \Rightarrow x = 7 \\ x-2 = -5 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$

II $|5x+2| = x-1$

Rezolvare

① Explicităm mod

② Rezolvăm ec în fiecare caz

$$|5x+2| = \begin{cases} 5x+2, & 5x+2 \geq 0, x \geq -\frac{2}{5} \\ -5x-2, & 5x+2 < 0, x < -\frac{2}{5} \end{cases}$$

I $x \geq -\frac{2}{5} \Rightarrow 5x+2 = x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$ ∄ $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{5}$

II $x < -\frac{2}{5} \Rightarrow -5x-2 = x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$ ∄

④ Inecuații cu module

$|2x-3| \leq 1$. Folosim proprietățile

$-1 \leq 2x-3 \leq 1 \;/ +3$

$2 \leq 2x \leq 4 \;/ :2$

$1 \leq x \leq 2$

$x \in [1, 2]$

fișa 7: Parte întreagă. Parte fracționară

① Definiție

Fie $x \in \mathbb{R}$. $[x]$ = cel mai mare nr întreg $\le x$

Ex $[0,25] = 0$

$[-0,25] = -1$

② Proprietăți

1) $[x] \in \mathbb{Z}$ (este nr întreg)

2) $[x] \le x < [x] + 1$

3) $x - 1 < [x] \le [x]$

4) $[x + n] = [x] + n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ex: $[x + 2] = [x] + 2$

③ Partea fracționară

Def: $\{x\} = x - [x]$

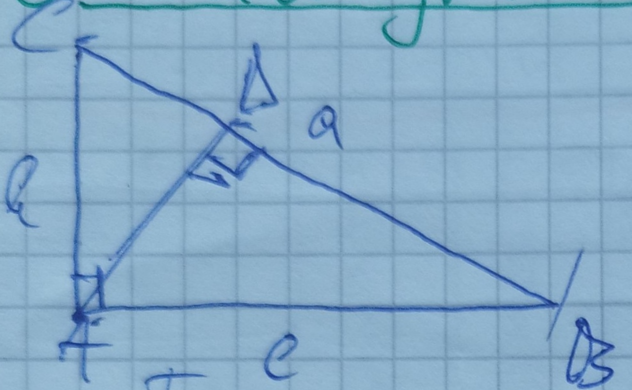
1) $\{x\} \in [0, 1)$

2) $\{x + n\} = \{x\}$, $n \in \mathbb{Z}$

Ex: $\{x - 3\} = \{x\}$

Fișa 8: Trigonometrie

① Triunghiul dreptunghic



1) Teorema lui Pitagora

$a^2 = b^2 + c^2$

2) Teorema catetei

$AB^2 = BC \cdot BD$

$AC^2 = BC \cdot CD$

3) T. înălțimii

$AD^2 = BD \cdot DC$

4) Cateta op ∡30° = $\frac{1}{2}$ ipotenuză

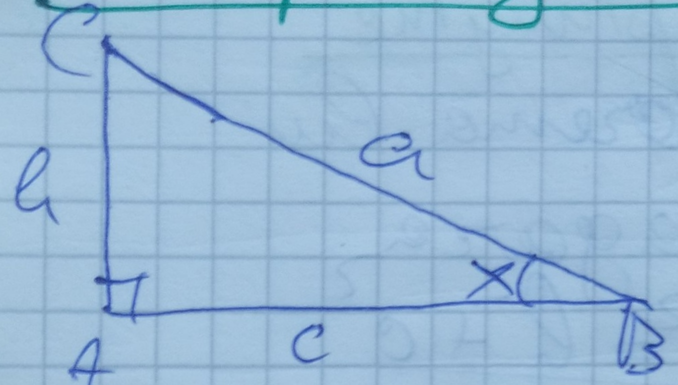
5) Mediana coresp ipotenuzei = $\frac{1}{2}$ ipotenuză

6) Înălțimea coresp ipotenuzei = $\frac{c_1 \cdot c_2}{i}$ $\quad AD = \frac{AC \cdot AB}{BC}$

7) A ΔΔ dreptunghic = $\frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

$A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2}$

② Funcții trigonometrice în Δ dreptunghic



$$\sin x = \frac{c\ op}{ip}$$

$$\cos x = \frac{c\ alăt}{ip}$$

$$tg\, x = \frac{c\ op}{c\ alăt}$$

$$ctg\, x = \frac{c\ alăt}{c\ opus}$$

① Obs: Formula trigonometrică fundamentală

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

② $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

③ $ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

④ $ctg\,x = \frac{1}{tg\,x}$

$\pi = 180^\circ$

⑤ Tabel valori

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
ctg	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

⑦ Unghiuri complementare

$\sin(90^\circ - x) = \cos x$

$\cos(90^\circ - x) = \sin x$

$tg(90^\circ - x) = ctg\,x$

$ctg(90^\circ - x) = tg\,x$

⑧ Unghiuri suplementare

$\sin(180^\circ - x) = \sin x$

$\cos(180^\circ - x) = -\cos x$

9 Semnul funcțiilor trig în cele 4 cadrane

	0-90°	90°-180°	180°-270°	270°-360°
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

10 Paritatea f trig

1) sin, tg, ctg impare

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$tg(-x) = -tg\,x$

$ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$

2) cos pară

$\cos(-x) = \cos x$

11 Periodicitatea f trig

1) sin, cos $T = 2k\pi$

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

2) tg, ctg $T = k\pi$

$tg(x + k\pi) = tg(x)$ $ctg(x + k\pi) = ctg\,x$

② Reducerea la primul cadran

cad I (0° - 90°) notăm t ← $\sin t$, $\cos t$

cad II (90° - 180°) notăm $180° - t$ / $\pi - t$

$\sin(180 - t) = \sin t$
$\cos(\pi - t) = -\cos t$

cad III (180° - 270°) notăm $180° + t$ / $\pi + t$

$\sin(180° + t) = -\sin t$
$\cos(180° + t) = -\cos t$

cad IV (270° - 360°) notăm $360° - t$

$\sin(360° - t) = -\sin t$
$\cos(360° - t) = \cos t$

$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{6} = 30°$

$\frac{\pi}{4} = 45°$

$\frac{\pi}{3} = 60°$

$\frac{\pi}{2} = 90°$

$2\pi = 360°$

$\frac{3\pi}{2} = 270°$

fișa 9: Funcția de grad 2

① Definiție

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

se numește funcție de grad II

② Valoare de extrem

I) Dacă $a > 0$ f admite val minimă și $f_{min} = \frac{-\Delta}{4a}$

II) Dacă $a < 0$ f admite val max și $f_{max} = \frac{-\Delta}{4a}$

Obs: ① Valoarea de extrem $\frac{-\Delta}{4a}$ a f se obține pt $x = \frac{-b}{2a}$

② Punctul de coord $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ se numește punct de extrem și corespunde vf parabolei

③ Monotonia f de gr II

- Intervalele de monot sunt:

$\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ și $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$

- Tabel de monot

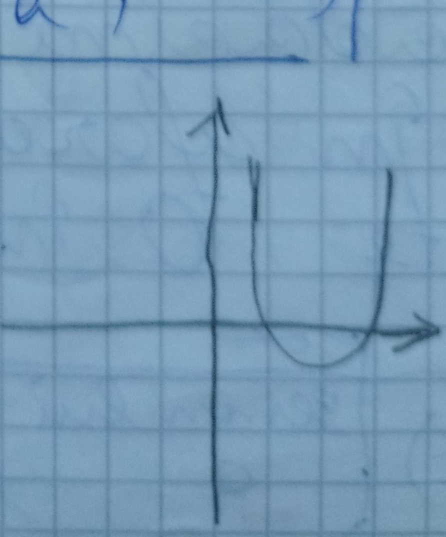
I $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		↘	$-\frac{\Delta}{4a}$ min	↗	

- f strict descresc pt $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$
- f strict cresc pt $x \in \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$
- Img funcției $= \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$

$Im f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$

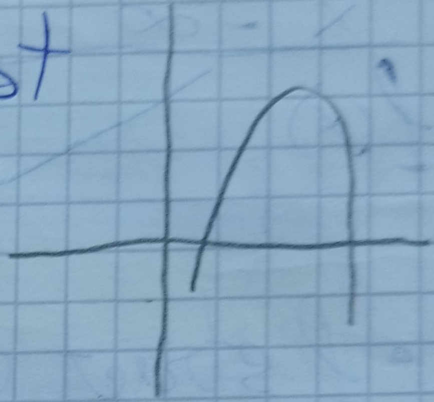
↳ toate val lui y de pe grafic



II $a<0$

x	$-\infty$	...	$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$ max	$\searrow$	

- f strict cresc pt $x\in(-\infty,-\frac{b}{2a}]$
- f strict descresc pt $x\in[-\frac{b}{2a},+\infty)$
- $Im f=(-\infty,-\frac{\Delta}{4a}]$



④ Semnul f de grad II

- Reguli de semn

I $\Delta>0$ funcția de gr II are semn contrar lui a între rădăcini, are semn lui a în afara rădăcinilor, și este 0 în rădăcină

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		semn lui a	0	semn op lui a	0	semn a	

II $\boxed{\Delta = 0}$ funcția de gr II este 0 în rădăcină, și în rest are semnul lui a

x	$-\infty$		$x_1 = x_2$		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a		0	semnul lui a	

III $\boxed{\Delta < 0}$ funcția de gr II are semnul lui a pe tot domeniul

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui a		

Obs: Cond ca o exp de gr II să aibă semn const pt orice x real este $\boxed{\Delta < 0}$, și $\boxed{a}$ să aibă semnul cerut.

- **De știut:** pt a studia sem f de gr II parcurgem următorii pași

① Rezolvăm ec atașată
$f(x)=0$
② facem tabel de semn
③ din tabel precizăm
val lui x pt care f este
poz sau neg

⑤ Graficul f de gr II

- G_f = parabolă
- G_f este figură sim
- axa de sim este // cu Oy
și trece prin vf parabolei
- ec axei de sim

$$x=-\frac{b}{2a}$$

- pt graf det: ① $G_f \cap Ox$

$$\begin{cases} y=0 \\ ax^2+bx+c=0 \end{cases} \quad (x_1,0),(x_2,0)$$

② $G_f \cap Oy$ $\begin{cases} x=0 \\ f(0)=y=c \end{cases}$

③ coord vf: $\begin{cases} x_v = -\frac{b}{2a} \\ y_v = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$ ⇒

$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Obs! la Gf: ① Gf este tang axei Ox dacă $\Delta = 0$

② Gf este situat deasupra Ox dacă $y_v > 0$

sub Ox dacă $y_v < 0$

⑥ Inecuație de gr II

forma gen: $ax^2 + bx + c \geq, >, <, \leq 0$

Rezolv:

① Rezolv ec atașată:

$ax^2 + bx + c = 0$

② tabel de semn

③ Alegem din tabel soluția

④ De știut: soluția unei inec este un interval

(7) Forma canonică a f de gr II

$f(x) = ax^2 + bx + c$ =>

=> $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$

forma canonică

(8) Loc geometric

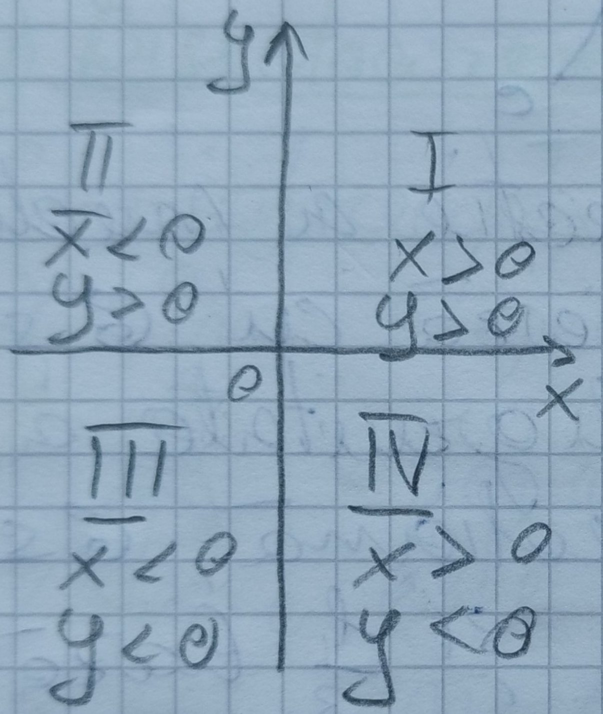
Def: prin loc geo înțelegem mulțimea pct din plan care au o proprietate comună

Obs!: pt a găsi locul geometric al V parabolei scriem formula pt x_V și y_V din relația mai simplă scoatem parametru și înlocuim în cealaltă relație

Dacă obținem o relație de gr I în x și y, locul

geo este o dreaptă.
Dacă obținem o rel de gr II locul geometric este o parabolă

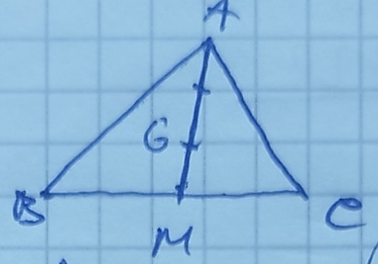
(9) Cadrane



fișa 10: Linii importante în Δ

① Mediana

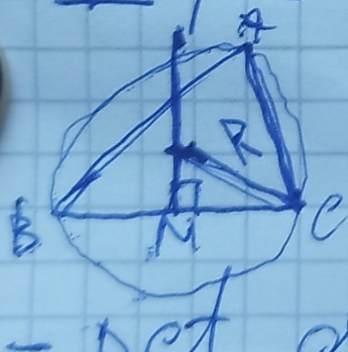
Segmentul care unește vf triunghiului cu mij lat op



- pct de intersecție a medianelor se notează cu G și este centru de greutate a Δ
- pe fiecare mediană, G se află la $\frac{2}{3}$ vf, și $\frac{1}{3}$ bază

② Mediatoarea

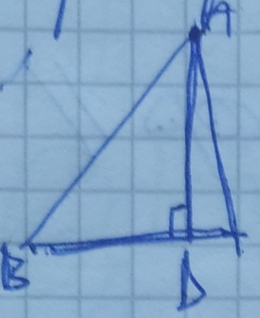
⊥ pe mijlocul segment



- pct de intersecție a mediatoarelor este centrul cercului circumscris Δ

③ Înălțimea

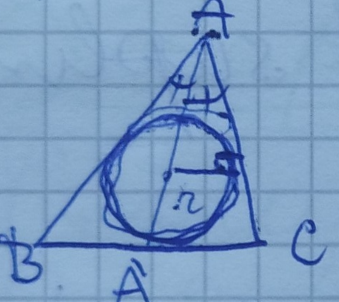
perp din vf pe latura op



- pct de ∩ al înălțimilor se notează cu H și se numește ortocentru

④ Bisectoarea

Semidreapta care împarte ∡ în 2 ∡ congruente

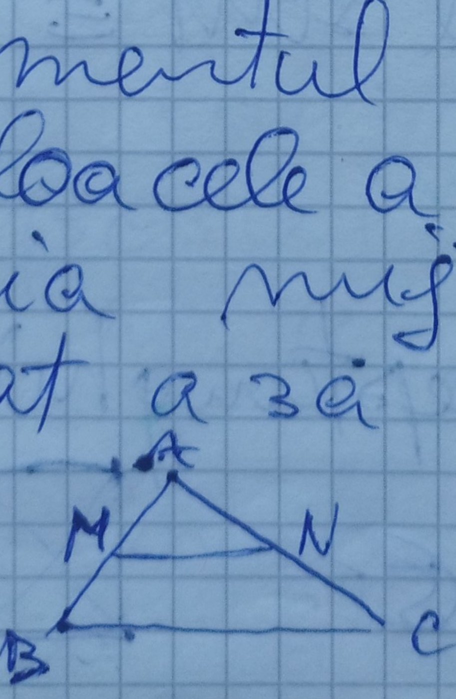


- pct de ∩ a bisectoarelor este centrul ○ înscr în △

⑤ Linia mijlocie

Segmentul care unește mijloacele a 2 laturi

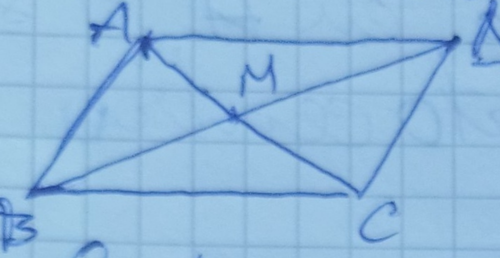
- linia mijlocie este ∥ cu lat a 3-a și = cu $\frac{1}{2}$ din ea



fișa 11: Patrulatere remarcabile

1) Paralelogram =

= Patrulaterul cu lat op ∥

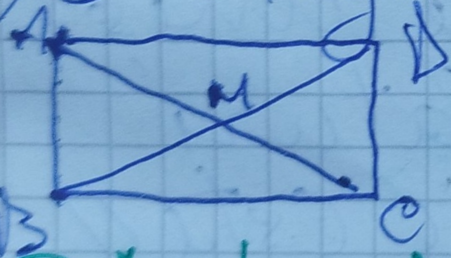


1. lat op sunt ≡
2. diagonalele se înjumătățesc
3. ∡ op sunt ≡
4. ∡ alăturate sunt suplimentare

2) Dreptunghi

Paralelogramul cu un ∡ drept (1) (2) (3) (4)

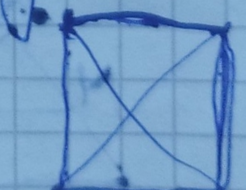
(5) Diagonalele sunt ≡



3) Pătrat

Dreptunghiul cu toate lat =

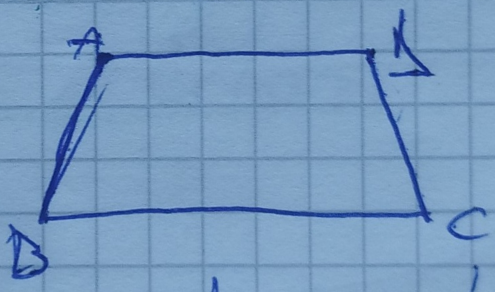
(1), (2), (3), (4), (5)



⑥ Diagonalele sunt ⊥
⑦ Diagonalele sunt bisect pt ∡

④ Romb
Paralelogramul cu lat =
①, ②, ③, ④
⑤ Diagonalele sunt ⊥ și bisectoare pt ∡

⑤ Trapez
Patrulaterul cu 2 lat ∥ și 2 ∦

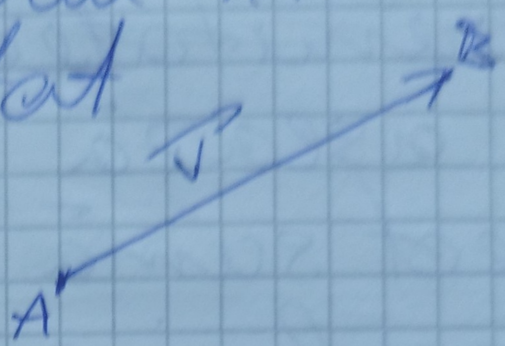


- lat ∥ se numesc baze
- Dacă lat ∦ sunt =, trap este isoscel
- În trap is, diagonalele sunt =
- Lm în trap este ∥ cu bazele și = cu semisuma lor

Fișa 12 : Vectori

I Geometric

1) Definiție: Vectorul $\vec{AB}$ = segment orientat



A = Origine

B = extremitate

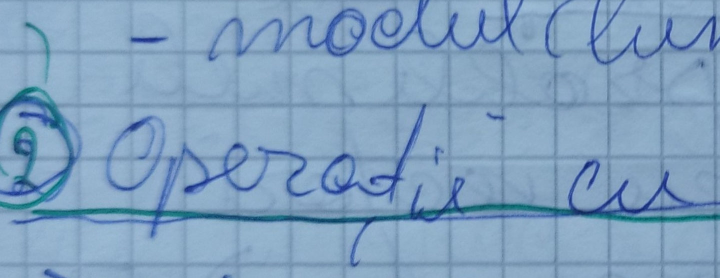
$\vec{v}$ - direcție
- sens
- modul (lungime)

2) Operații cu vectori

1) Adunarea

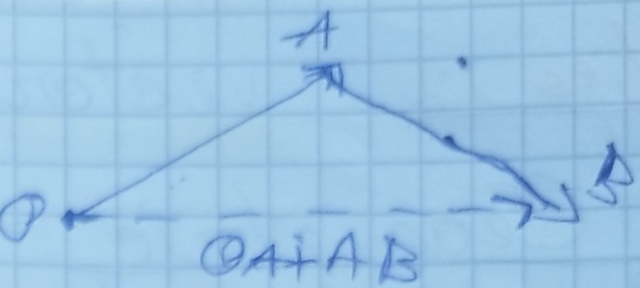
a) Regula paralelogram

- se aplică când vectorii au origine comună

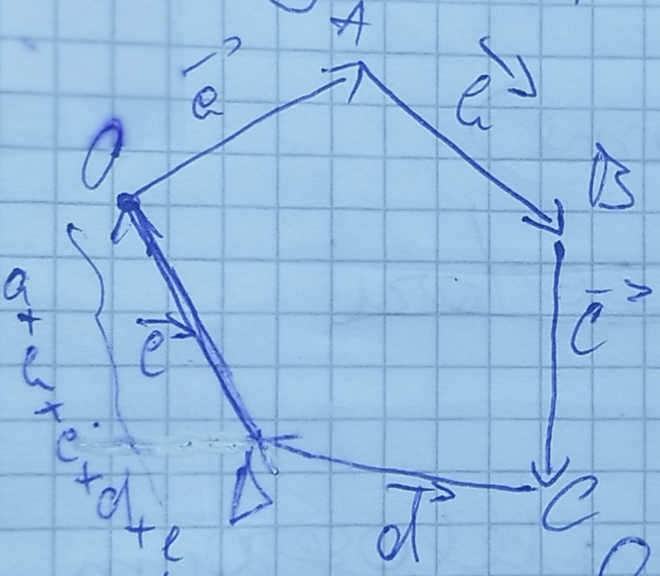


se constr. para▱ OACB și diag care pornește din originea comună este vectorul sumă

b) Regula Δ
- aplicăm reg Δ dacă în extremitatea primului vect se așează originea celuilalt
= vect sumă unește originea primului cu extremitatea celui de-al doilea



b) Regula poligonului



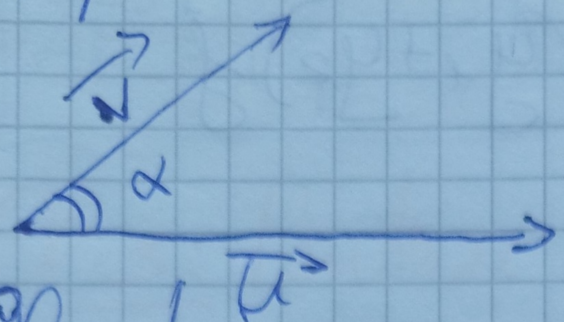
Obs! toate problemele cu vectori (geometrie) se rezolvă folosind adunarea lor

2) Înmulțirea cu scalar

$\alpha \cdot \vec{v}$ - aceeași direcție
- același sens ($\alpha > 0$) sau op ($\alpha < 0$)
- modul $= |\alpha| \cdot |\vec{v}|$

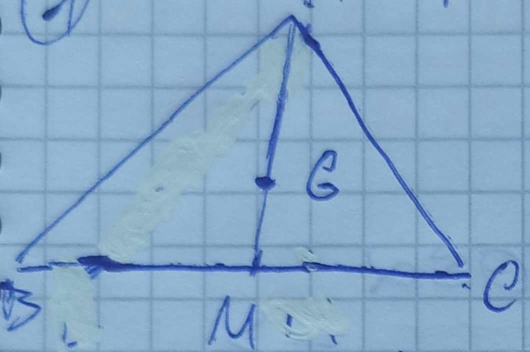
3) produs scalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$



Obs! imp:

① $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



② $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

③ G = centru greutate

$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

④ M = mijloc BC => AM = mediană

$\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$ Doar vectorial

II Vectori analitică

① Def: $\vec{u} = xi + yj$ sau $\vec{u} = xy$

② Egalitate

$\vec{u} = x_1 i + y_1 j$
$\vec{v} = x_2 i + y_2 j$ => $\vec{u} = \vec{v}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

3) Adunare

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$.

4) Modulul

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

5) Produs scalar

$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Obs! $\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

6) Cond ca $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari (paraleli)

$\vec{u}, \vec{v}$ colin $\Rightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$

7) Cond ca $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie ortogonali (perpendiculari)

$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

8) Coord vector AB

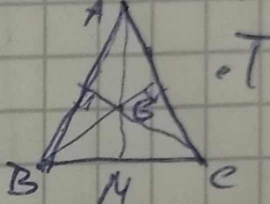
$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$$

Obs: Pentru a transforma - în + se schimbă ordinea termenilor

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$$

9) Th

① În ΔABC { AM mediană, G centru greutate



a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = 3\overrightarrow{TG}$ $\forall T \in$ plan

② $\vec{u} \parallel \vec{v}$ sau $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniare $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}^*$ a.î. $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u}$

③ Dacă $\vec{u} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, $\vec{v} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$ at $\vec{u} \parallel \vec{v}$ sau $\vec{u}, \vec{v}$ coliniare

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$

Obs: A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ (sau analoagele)

fișa 13 **Trigonometrie.**

Formulele trigonometrice

① Formula fundamentală

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Obs: Determinarea val pt $\sin x$ și $\cos x$ din formula fundamentală:

$$\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$$

- semnul din fața rad depinde de cadranul în care se află unghiul

② Formulele pt sume și diferențe de unghiuri

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cos a$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\,tgb}$$

$$tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\,tgb}$$

$$ctg(a+b)=\frac{ctga\cdot ctgb-1}{ctga+ctgb}$$

$$ctg(a-b)=\frac{ctga\cdot ctgb+1}{ctgb-ctga}$$

③ formule pt unghi dublu

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x$$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

$$tg\,2x=\frac{2tg\,x}{1-tg^2 x}$$

$$ctg\,2x=\frac{ctg^2 x-1}{2ctg\,x}$$

Obs:

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$$

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$$

1 Obs: Formula pt sin x și cos x în funcție de unghiul dublu:

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

- semnul ~~depin~~ din față depinde de cadranul în care se află unghiul.

2) Substituția universală

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

5) Transformarea sumelor în produse

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$

$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

6) Formulele pentru transformarea produselor în sume

$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$

$\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$

$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

7) Ecuații trigonometrice

pag 96

⑧ Exerciții de comparare pt sin și cos

Ex: Demonstrați că $\cos 1 > \cos 2$

Rezolvare: ① Stabilim în ce cadran este argumentul (1, 2)

② Folosim tabel de valori sau tabel de semn

Pornim de la $\pi = 180°$ și $\pi = 3,14$

cad I – $(0°, 90°)$

$\left(0, \frac{3,14}{2}\right) \Rightarrow (0; 1,57)$

cad II – $(90° - 180°)$

$(1,57; 3,14)$

cad III – $(180° - 270°)$

$(3,14; 4,71)$

cad IV – $(270° - 360°)$

$(4,71; 6,28)$

① $1 \in$ cad I $(0, 90°)$

$2 \in$ cad II $(90° - 180°)$

$\cos 2 < 0 \Rightarrow \cos 1 > \cos 2$

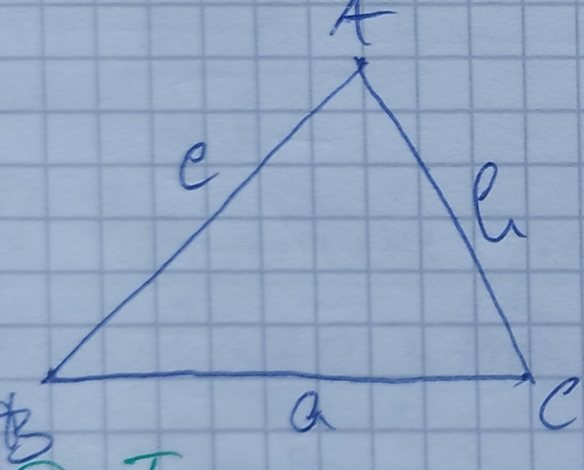
Fișa 14: Aplicațiile trigonometriei în geometrie

① Teorema sinusurilor:

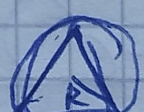
În orice ΔABC avem relația:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

- unde: a, b, c laturi
  A, B, C ∢
  R = raza cerc circumscris



cercul circumscris trece prin vf Δ



② Teorema cosinusului

În orice ΔABC avem relația:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

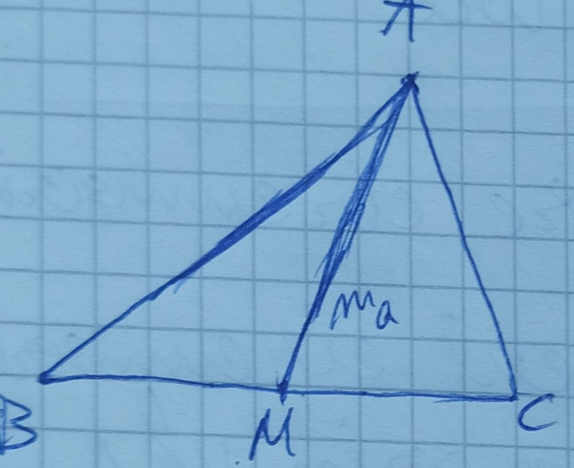
(Pitagora generalizat)

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

③ Teorema medianei:



$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Obs!: - A rezolva un Δ înseamnă să determinăm lat Δ, ∢ Δ, perimetrul, aria
- Pentru a determina laturi sau ∢ folosim T sinus, sau T cosinus.

- Pentru a determina R
  - folosim t sin, sau
  - o formulă pt aria Δ
- Pentru a determina r (raza cercului înscris) se folosește formula pt aria Δ

$A = p \cdot r$

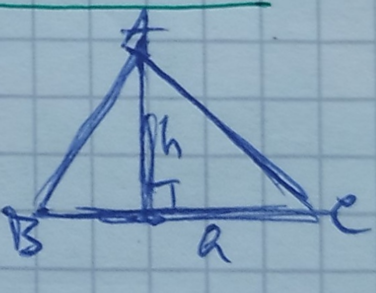
r - raza cerc înscris

p = semiperimetru $\frac{a+b+c}{2}$

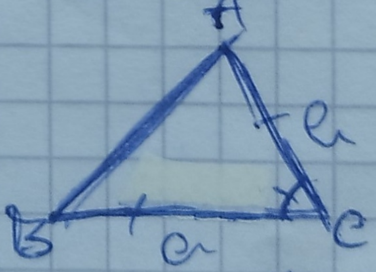
$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

4) Formule pentru aria Δ:

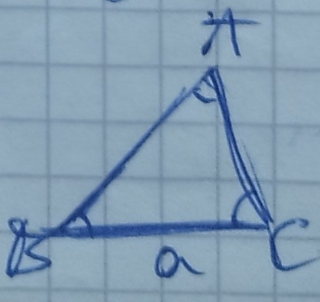
$A = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțimea}}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$



$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$



$A = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$



$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

$$A = r \cdot p$$ r = raza cerc înscris în Δ

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$$ ← determinant (clasa a XI-a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

($\Delta = 0$ pt a demonstra A, B, C coliniare)

fisa 13

Geometrie

① Distanța între 2 pct A, B

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

② Coord mijloc unui segment

Mij AB => $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

③ Coord centrului de greutate (G)

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

④ Distanța de la un pct la o dreaptă

$d: ax + by + c = 0$

$A(x_A, y_A)$

$$d(A, d) = \frac{|a x_A + b y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Clasa a $\overline{X_a}$ $\longrightarrow$

Fișa 16: **Funcții injective, surjective, bijective**

① **Definiție injectivitate:**

Ⓘ O funcție $f: A \to B$ este inj pe A dacă $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (funcție def sintetic)

Ⓘⓘ $f: A \to B$ este inj dacă $\forall x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (f definite analitic)

Ⓘⓘⓘ $f: A \to B$ este inject dacă orice // la Ox taie graficul în cel mult un pct.

Obs!: Dacă $f: A \to B$ este strict monot pe A, atunci f este inj.

Obs: $f: A \to B$ NU este inj dacă există $x_1 \neq x_2$ cu $f(x_1) = f(x_2)$

Obs: Funcția modul NU este inj

Obs: Funcția de gr I este inj pe $\mathbb{R}$

Funcția de gr II este inj pe intervalele de monotonie

! Obs: ① f I $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$
este bijectivă pe $\mathbb{R}$
- inversa ei $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$
$ax + b = y \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$

---

② f II $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$
NU este bijectivă pe $\mathbb{R}$, este bijectivă pe intervale

I) f inj pe intervalele de monotonie
- $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$
- $\left[-\frac{b}{2a}, \infty\right)$

} Deci există 2 restricții injective

II) f surj pe $\left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$ pt $a > 0$
$\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ pt $a < 0$

Deci f II are 2 restricții bijective
- $f_1: \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \to \operatorname{im} f$
- $f_2: \left[-\frac{b}{2a}, \infty\right) \to \operatorname{im} f$

Funcția inversă

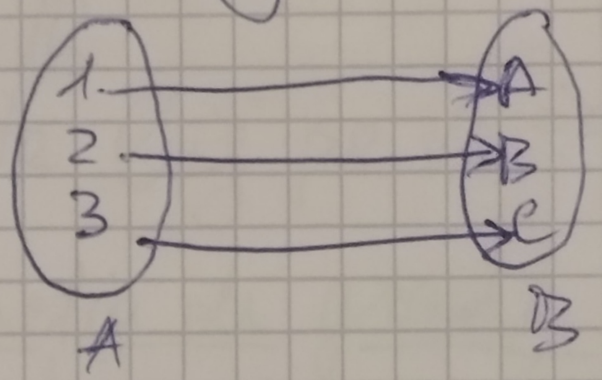
Pt f^{-1} schimbăm domeniu cu codomeniu, iar legea de

coresp se obține din surj, adică scoatem x din y = f(x)

② Funcții surjective

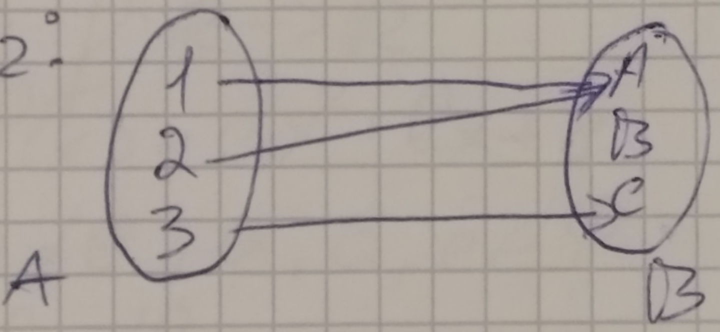
Def: f: A -> B este surj dacă ∀ element din codomeniu este imagine (pt f definite sintetic)

Ex₁:



surj

Ex₂:



nu e surj

Def₂: f: A -> B e surj dacă $\forall y \in B$ $\exists x \in A$ a.î. $f(x) = y$

Def₃: f: A -> B e surj dacă ∀ ∥ Ox taie Gf în cel puțin un pct

③ Funcția bijectivă:

1° f: A → B este bijectivă dacă este inj și surjectivă simultan

2° f: A → B este bijectivă dacă orice // la Ox taie Gf într-un singur pct

Fișa 17 Funcții particulare
- Domeniu de def. Proprietăți

① Funcția grad I

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$; $a \neq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- f este bij pe $\mathbb{R}$ => e inversa

② Funcția de grad II

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- f nu este bij pe $\mathbb{R}$, e bij pe intervale.

- f inj - $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$,
  \ $[-\frac{b}{2a}, \infty)$
- f surj pe - pt $a > 0 \to [-\frac{\Delta}{4a}, \infty)$
  \ pt $a < 0 \to (-\infty, -\frac{\Delta}{4a})$

③ Funcția putere

Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$a^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- f injectiv < n par f nu e inj; n impar, f inj pe $\mathbb{R}$
- f surjectivitate — n par, nu e surj; n impar e surj

Obs: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Operații cu puteri (proprietăți)

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) $a^n : a^m = a^{n-m}$ } aceeași bază
3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ } baze dif
5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

— prop sunt valabile și se aplică în ambele sensuri

4) Funcția radical

Def 1: $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$

$f(x) = \sqrt[2]{x}$

- $D_f = [0, \infty)$
- f radical este bij pe D_f

Def 2: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- f bij pe $\mathbb{R}$

Obs !: Prin $\sqrt[n]{x}$ înțelegem nr care ridicat la puterea n să fie $= x$

$n \geq 2$

Cond de existență pt $\sqrt{\ }$:

$\sqrt[n]{E(x)}$ are sens dacă

I pt n par $\Rightarrow E(x) \geq 0$
II pt n impar $\Rightarrow E(x) \in \mathbb{R}$

Proprietăți radicali

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

2) $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

3) $(\sqrt{a})^k = \sqrt{a^k}$

4) $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[k \cdot n]{a}$

5) $b \cdot \sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b^k \cdot a}$

6) Scoaterea unui factor de sub radical

$\sqrt[3]{2^{11}}$ | Efectuăm împărțirea cu rest dintre exponent puterii de sub $\sqrt{}$ și ordinul $\sqrt{}$. Scoatem factorul la putere = cu câtul împărțirii, și rămâne sub $\sqrt{}$ factorul cu restul împărțirii

$11 : 3 = 3$ (cât)
$\underline{9}$
2 (rest)

$\sqrt[3]{2^{11}} = 2^3 \cdot \sqrt[3]{2^2}$

7) raționalizarea numitorilor

- rep eliminarea expresiilor cu $\sqrt{}$ de la numitorul unei fracții prin amplific fracției cu expr conjug numitorului

- 2 expr cu $\sqrt{}$ se numesc conjugate dacă prin înmulțire dau o expr fără $\sqrt{}$

expr conjug

(I) $\sqrt[n]{a^k}$ și $\sqrt[n]{a^{n-k}} \overset{*}{\Rightarrow} a$

(II) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ și $(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \overset{*}{\Rightarrow} a-b$

(III) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$ și $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a\cdot b}+\sqrt[3]{b^2}) \overset{*}{\Rightarrow} a-b$

(IV) $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$ și $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}) \overset{*}{\Rightarrow} a+b$

(5) Funcția rațională (fracția)

Def: $f: \mathbb{R}-\{x_0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{px}{gx}$ unde p, q sunt expr de gr I, II ...

- x_0 sunt pct în care se anulează g_x (răd numitor)

Ex: $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

- punem cond ca numitor să fie $\neq 0$ și obținem D_f

$x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

Ex: $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$

$x^2+1 \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

Ex: $f(x) = \frac{x-2}{x(x+1)}$

$x(x+1) \neq 0 \Rightarrow$
- $x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- $(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x}$$ ← Ex

$x^2 - 3x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 3\}$

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ / $x = 3$

Fișa 18 **Ecuații cu radicali**

- pentru a rezolva o ec irațională, parcurgem următoarele etape

I Punem condiția să existe fiecare radical

II Dacă ec conține numai $\sqrt[2]{\ }$ se ridică întreaga ecuație la $()^2$

III Dacă ec conține numai $\sqrt[3]{\ }$ se ridică întreaga ec la $()^3$

IV Dacă ec conține $\sqrt[2]{\ }$ și $\sqrt[3]{\ }$ sau $\sqrt[2]{\ }$ și $\sqrt[4]{\ }$, sau $\sqrt[3]{\ }$ și $\sqrt[4]{\ }$ procedăm în următorul mod

- Notăm cu câte o literă fiecare $\sqrt{\ }$
- Ridicăm fiecare notație la puterea = cu ordinul $\sqrt{\ }$
- Formăm sist alcătuit din ec inițială în care am înlocuit $\sqrt{\ }$ și a doua ec se obține eliminând

x între cele 2 notații
• din sist format se află una din litere, și revenim la notație
∨ dacă ce conține un singur √ păstrăm √ într-un membru, ce rămâne trece dincolo

fișa 19 Ecuații exponențiale

① Puteri - proprietăți - reguli calcul

1) $a^x \cdot a^y = a^{x \cdot y}$
2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
4) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
5) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

!Obs: $a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

② Ecuații exponențiale

1) Sunt ec în care necunoscuta apare la exponent

③ Tipuri de ecuații

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$

Ex: $3^{2x+1} = 3^{-x^2} \Rightarrow 2x+1 = -x^2 \Rightarrow x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

2) $a^{f(x)} = b$ unde b nu este putere a lui a

I Dacă $b < 0$ ec nu are sens

II Dacă $b > 0$ logaritmăm ec în bază = cu baza puterii

Ex: $2^{x+1} = 3 \Rightarrow \log_2 2^{x+1} = \log_2 3$

3) $c_1 \cdot a^{2f(x)} + c_2 \cdot a^{f(x)} + c_3 = 0$

Notăm $a^{f(x)} = t$; $t > 0$

Ec devine $c_1 t^2 + c_2 t + c_3 = 0$

Ex: $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

notăm $2^x = t$, $t > 0$

$t^2 - 9t + 8 = 0$

$\Delta = 81 - 32 = 49$

$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{cases} 8 \\ 1 \end{cases}$

$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

$2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$

4) Ecuații exponențiale care conțin 3 baze diferite, 2 sunt pp a 3a este produsul bazelor

Rezolvare: Se împarte ec la una din bazele pp

Ex: $4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$

$4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3^2$

$\frac{4^x}{9^x} + \left(3 \cdot \frac{6}{9}\right)^x - 4 = 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(3 \cdot \frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = t$

$t^2 + 3t - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$ → -4 (F), 1

~~$\left(\frac{2}{3}\right)^x = -4 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = -\left(\frac{2}{2}\right) \mid \cdot 3$~~

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$

5) Ec exponențiale cu 2 baze cu $\sqrt{\ }$ expresii conjugate

Rezolvare:

I Înmulțim bazele

II Notăm o bază cu t, cealaltă va fi $\frac{1}{t}$ și rezolvăm ec

Ex: $(\sqrt{5}-2)^x+(\sqrt{5}+2)^x=18$

$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-4=1$

$(\sqrt{5}-2)^x=t \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^x=\frac{1}{t}$ $\quad t>0$

ec devine:

$t+\frac{1}{t}=18 \Rightarrow t^2+1-18t=0$

$\Delta=324-4=320 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=8\sqrt{5}$

$t_{1,2}=9\pm4\sqrt{5}$ $\quad 9+4\sqrt{5}>0$, $\quad 9-4\sqrt{5}>0$

a) $(\sqrt{5}-2)^x=9+4\sqrt{5}$

$(\sqrt{5}-2)^x=(\sqrt{5}+2)^2$

$(\sqrt{5}-2)^x=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^2} \Rightarrow x=-2$

b) $(\sqrt{5}-2)^x=9-4\sqrt{5}$

$(\sqrt{5}-2)^x=(\sqrt{5}-2)^2 \Rightarrow x=2$

6) Ec exponențială în care folosim prop puterilor

Ex: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$

$2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 4 + 2^x \cdot 8 = 30$

$2^x(1 + 2 + 4 + 8) = 30$

$2^x \cdot 15 = 30 \Rightarrow 2^x = \frac{30}{15} = 2 \Rightarrow x = 1$

7) Ec care se rezolvă prin descomp în factori sau substituție

a) $A(a^{2x} + a^{-2x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0$ $a \neq 1$, $a > 0$

$A, B, C \in \mathbb{R}$

Se notează $\boxed{a^x + a^{-x} = y} \Rightarrow a^{2x} + a^{-2x} = y^2 - 2$

$\Rightarrow A(y^2 - 2) + By + C = 0$

b) $A(a^{3x} + a^{-3x}) + B(a^x + a^{-x}) + C = 0$

$\boxed{a^x + a^{-x} = y \Rightarrow a^{3x} + a^{-3x} = y^3 - 3y}$

Cond: $y \geq 2$ în notația inițială

Ex: $9(9^x+9^{-x})-3(3^x+3^{-x})-72=0$

notăm $3^x+3^{-x}=y$

$9^x+9^{-x}=y^2-2$

$9(y^2-2)-3y-72=0$

$9y^2-3y-90=0 \,/ :3$

cond

$3y^2-y-30=0$

$y_1=\frac{10}{3} \Rightarrow 3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$

$y_2=-3$ (F) $\quad 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3}$

$3^x=t>0$

$t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3t^2-10t+3=0$

$\Delta=64 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{10\pm 8}{6}$ ⟨ 3, $\frac{1}{3}$

$3^x=3 \Rightarrow x=1$

$3^x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=-1$

Ex: $36 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 6^x = 180 + 150^x$

Descompunem ec

$36 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 6^x - 180 - 150^x = 0$

$(36 \cdot 5^{2x} - 180) + (5 \cdot 6^x - 150^x) = 0$

$36(5^{2x} - 5) + 6^x(5 - 25^x) = 0$

$(5^{2x} - 5)(36 - 6^x) = 0$ ⟨ $5^{2x} - 5 = 0 \Rightarrow 5^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$

$36 - 6^x = 0 \Rightarrow x = 2$

8) Ecuații exponențiale cu soluție unică

Obs: Ecuația este de forma $f(x) = const$

Ex$_1$: $3^x + 4^x = 7$

I Căutăm soluția x_0:

II Funcția este strict monotonă $\Rightarrow$ f injectivă $\Rightarrow$ Ec are soluție unică

Ex$_2$: $4^x + 3^x = 5^x$ $\quad x_0 = 2$

$\left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x$

$\Rightarrow$ Suma de fct expo cu baza $< 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f strict descresc $\Rightarrow$ f inj $\Rightarrow$ Soluție

!!! Obs: $\boxed{x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz}$

- Egalitatea conduce la următoarea descompunere:

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$$

$$(x^2+y^2-2xy)+(x^2+z^2-2xz)+(y^2+z^2-2yz)=0$$

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=0 \\ x-z=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=z$$

Fișa 20: Logaritmi

① Definiție:

Prin logaritm în baza a din A ($\log_a A$) înțelegem exponentul puterii la care ridicăm a pt a obține A

$$\log_a A = n \iff a^n = A$$

Obs: $a^{\log_a A} = A$

Ex: $2^{\log_2 7} = 7$

$\log_2 8 = 3$ $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

② Condiții de existență

$\log_a A$ are sens dacă $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ A > 0 \end{cases}$

③ Proprietăți

① $\log_a 1 = 0$

② $\log_a a = 1$

③ $\log_a a^n = n$

④ $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$

⑤ $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$

⑥ $\log_a A^n = n \cdot \log_a A$

⑦ $a^{\log_a c} = c^{\log_a a}$

⑧ $a^{\log_a A} = A$

⑨ $\boxed{\log_a A = \log_a B \Leftrightarrow A = B}$

funcția logaritmică este injectivă

⑩ Monotonia f logaritmice

I $\boxed{a > 1}$ f log str crescă $\Leftrightarrow$ din $\log_a A > \log_a B \Rightarrow A > B$

II $\boxed{a \in (0, 1)}$ f log str descresc $\Rightarrow$ $\log_a A > \log_a B \Leftrightarrow A < B$

4. Formula de schimbare a bazei

$$\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$$

Obs: $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

5.

$\log_{10} a = \lg a$

$\log_e a = \ln a$

$\ln 0 = -\infty$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln \infty = \infty$

doar la limite

$\log 1 = 0$ indiferent de bază

$e^{\infty} = \infty$

$e^{-\infty} = 0 = \frac{1}{e^{\infty}}$

Fișa 21: Ecuații logaritmice

① Rezolvare

1) Punem condiția să existe logaritmii:

$\log_a A$ are sens $\begin{cases} A > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

2) Tipuri de ecuații logaritmice

ⓐ $\log_a f(x) = n \Rightarrow f(x) = a^n$

ⓑ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$

Toate ec în log se vor transf în acestea

ⓒ Ecuații care conțin log cu baze diferite

- în acest caz, aducem log la aceeași bază

(d) ec exponențial logaritmice
- cele în care am și log și exponențială

(e) ec logaritmice cu sol unică
- folosim următoarea obs:

Obs: Dacă $f(x)$ este inj atunci ec $f(x) = c$ (const) este ec cu sol unică

- trecem termenii care conțin necunoscuta într-un membru
- notăm cu $f(x)$
- stabilim inj funcției

Model

a) $\log_2(2x+1) = 1$ cond $\{2x+1>0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$

$(2x+1) = 2^1$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$ (A)

b) $\log_3 (x-2) + \log_3 x = \log_3 8$

cond: $\begin{cases} x-2>0 \\ x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>2 \\ x>0 \end{cases}$ $\Rightarrow x \in (2, \infty)$

$\log_3 x(x-2) = \log_3 8$

$x(x-2) = 8$ $\Delta = 4+32 = 36$

$x^2 - 2x = 8$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm 6}{2}$ $\begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$ $x = 4$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ $x \in (2, \infty)$

c) $2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9$

$2\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 9$

$2\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} + \frac{\log_2 x}{-1} = 9$

$2\log_2 x + 2\log_2 x - \log_2 x = 9$

$3\log_2 x = 9$

$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$

(92)

d) $\log_2(9-2^x)=3-x$ cond $(9-2^x>0 \Rightarrow 2^x<9$

$\log_2(9-2^x)=\log_2 2^{3-x}$ $\quad 2^x=t \quad t>0$

$9-2^x=2^{3-x}$ $\quad \Delta=81-32=49$

$9-2^x=\frac{8}{2^x}$ $\quad t_{1,2}=\frac{9\pm 7}{2} <^{1}_{8}$

$9-t=\frac{8}{t}$ $\quad$ I $2^x=1 \Rightarrow x=0$ (A) <9

$9t-t^2=8$ $\quad$ II $2^x=8 \Rightarrow x=3$ (A)

$t^2-9t+8=0$

e) $x+2^x+\log_2 x=7$

$g(x)=2^x$ - f exponențială baza >1, inj str cresc

$h(x)=\log_2 x$ - f log, inj str cresc

$g(x)=x$ - f gr I inj, str cresc (+)

$f(x)=g(x)+g(x)+h(x)$
$f(x)=7$
} $\Rightarrow$ ec cu soluție

$x=2$ sol

Fişa 22 **Inecuații logaritmice și exponențiale**

- Folosim monotonia funcțiilor exp și log

I Dacă $a > 1$ fct este str cresc și se păstrează sensul inegalității

- Din $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$
- Din $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$

II Dacă $a \in (0,1)$ fct este str descresc. În acest caz se schimbă sensul inegalității

- Din $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$
- Din $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

! Obs ① Punem condiții să existe log și în cazul inecuațiilor

② După transformări se va obține o relație de forma $\log_a f(x) \geq$ sau $\leq \log_a g(x)$

În acest caz, folosim monotonia funcției.

Fișa 23: Ecuații Trigonometrice

I Ecuații trigonometrice fundamentale (simple)

① $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$

Sol: $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

• arcsin a = unghiul din $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pt care sin-ia valoarea a

• $\arcsin(-a) = -\arcsin a$
fct impară

SIN

② $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$

Sol: $x = \pm \arccos a + 2k\pi$

• arccos a = unghiul din ~~intervalul închis~~ $[0, \pi]$ pt care cos ia valoarea a

COS

• $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{5\pi}{2} = \dots = 0$

cos($\forall$ multiplu impar de $\frac{\pi}{2}$) = 0

③ $\boxed{tg\ x = a,\quad a \in \mathbb{R}}$ tg

sol: $x = arctg\ a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- $arctg\ a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- arctg a = ∢ din ~~intervalul~~ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pt care tg ia val a
- $arctg(-a) = -arctg\ a$

④ $\boxed{ctg\ x = a,\quad a \in \mathbb{R}}$ ctg

sol:
$x = arcctg\ a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- arcctg a = ∢ din $(0, \pi)$ pt care ctg ia val a
- $arcctg(-a) = \pi - arcctg\ a$

II Ecuații care conțin fct de același nume.

① $\boxed{\sin \alpha x = \sin \beta x}$

sol: $\alpha x = (-1)^k \cdot \beta x + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

!Obs → k = par ⇒ S_1
→ k = impar ⇒ S_2 } ⇒ $S = S_1 \cup S_2$

② $\cos \alpha x = \cos \beta x$

sol: $\alpha x = \pm \beta x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

!Obs: $\begin{bmatrix} S_1 \text{ pt } (+) \\ S_2 \text{ pt } (-) \end{bmatrix} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2$

③ $tg\, \alpha x = tg\, \beta x$

Sol: $\alpha x = \beta x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

④ $ctg\, \alpha x = ctg\, \beta x$

sol: $\alpha x = \beta x + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

III Ecuații trigonometrice care se reduc la ec algebrice (dacă facem o notație)

Ex: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \qquad \sin x = t$

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \qquad t \in [-1, 1]$

$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin 1 + k\pi$

$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} = S_1 \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi = S_2$

$S = S_1 \cup S_2$

IV Ec trigonometrică liniară

$a \sin x + b \cos x + c = 0$

Metode de rezolvare:

① Folosim substituția universală

$\boxed{tg \frac{x}{2} = t}$ și folosim relațiile

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad tg\, x = \frac{2t}{1-t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad ctg\, x = \frac{1-t^2}{2t}$

!Obs: Ec liniară devine:

$$\boxed{a \cdot \frac{2t}{1+t^2} + b \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + c = 0}$$

② $a \sin x + b \cos x + c = 0 \quad / : a$

$\sin x + \frac{b}{a} \cos x + \frac{c}{a} = 0$

$\frac{b}{a} = tg\, \alpha$

$\sin x + tg\, \alpha \cdot \cos x + \frac{c}{a} = 0$

$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x + \frac{c}{a} = 0$

$\sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x + \frac{c}{a} \cdot \cos \alpha = 0$

$\sin(x+\alpha) + \frac{c}{a}\cos\alpha = 0$

$\sin(x+\alpha) = -\frac{c}{a}\cos\alpha$

V Ec trigonometrice omogene

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0 \;/ : \cos^2 x$

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot a + b\cdot\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c = 0$

notăm $\frac{\sin x}{\cos x} = t = tg\,x$

$at^2 + bt + c = 0$

!Obs: Dacă membrul liber este $\neq 0$, îl scriem ca fiind cifra înmulțită cu 1, iar 1 se înloc cu $\sin^2 x + \cos^2 x$

ex: $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$

$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2\cdot 1$

$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + 2\cos^2 x)$

$4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

VI Ecuații simetrice

$a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$

Notăm $\sin x \pm \cos x = t \;/^2$

$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} \pm 2 \sin x \cos x = t^2$

$1 \pm 2 \sin x \cos x = t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

ec devine:

$a \cdot t + b \cdot \dfrac{t^2 - 1}{2} + c = 0$

VII Ec trig cu formule:

- ec în care folosim formule trig

ex: $\cos 5x + \cos 7x = \sin 2x$

$\cos a + \cos b = 2 \cos \dfrac{a+b}{2} \cdot \cos \dfrac{a-b}{2}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$2 \cos \dfrac{12x}{2} \cdot \cos \dfrac{-2x}{2} = 2 \sin x \cos x$

$2 \cos 6x \cdot \cos x - 2 \sin x \cos x = 0$

$2 \cos x (\cos 6x - \sin x) = 0$

$\Rightarrow \cos x = 0$

$\Rightarrow x = \pm \arccos 0 + 2k\pi$

$= \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad S_1$

sau

$\Rightarrow \cos 6x - \sin x = 0$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos 6x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$6x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

(I) $6x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$7x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\left.\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \quad , k \in \mathbb{Z}\right\} = S_1$

(II) $6x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi$

$5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

~~$k \in \mathbb{Z}$~~ $-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} = S_2$?

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2$

fișa 24: # Numere Complexe

① Definiție $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$

$i^2 = -1$

a = parte reală = $Re\, z$

b - parte imaginară = $Im\, z$

i = unitate imaginară

② Egalitatea nr complexe

$z_1 = z_2$ dacă $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

③ Conjugatul nr $z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$ = conjugat lui z

④ Modulul nr complex

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

⑤ Operații cu numere complexe

adunarea: $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$

$z_1 = a + bi$ $\quad z_1 \cdot z_2$ = înmulțim fiecare

$z_2 = c + di$ $\quad$ termen din prima paranteză cu toți termenii din a 2-a paranteză și înlocuim i^2 cu -1

Împărțirea: $\frac{z_1}{z_2}$ = amplificăm fracția cu conjugatul numitorului $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\overline{z_2} \cdot z_2}$

⑥ Puterile lui i:

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}$$

⑦ Observații importante

1) Suma a 4 puteri consecutive ale lui i = 0

2) $\overline{z} \cdot z = |z|^2$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z^n| = |z|^n$

(8) Ecuația de grad II cu $\Delta<0$

I Formula de rezolvare

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

II Relațiile lui Viette

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad S$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad P$$

Descompuneri

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

III Formarea ec de grad II cu coeficienți reali, când se cunoaște o rădăcină complexă

- folosim formula:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

- de știut:

∘ dacă ec are coef reali răd sunt

nr complexe conjugate $(z, \bar{z})$

IV Descompunerea în factori

- folosim formula

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x_1, x_2 = răd ec

Forma trigonometrică a unui nr complex

$\boxed{z = a + bi} \Rightarrow M(a, b)$

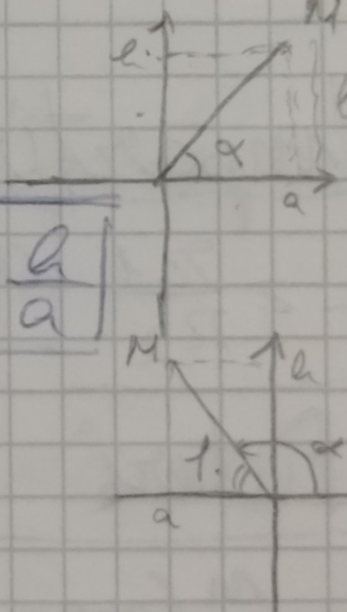
- M = imagine geo a nr $\mathbb{C}$ ($M(z)$)
- z = afixul pct M

Forma trigonometrică a nr

$\boxed{z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}$

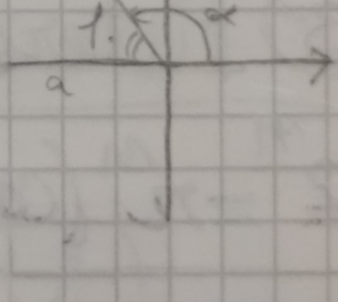
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- α = argument de z ($\arg(z)$)

!Obs: Pt a det α trebuie să precizăm cad în care se află M



I $M \in$ Cad I

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}$



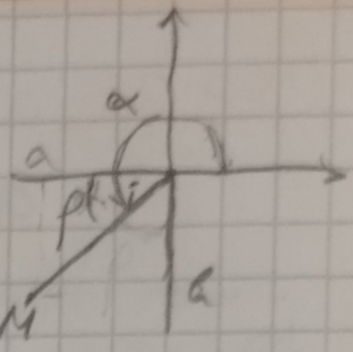
II $M \in$ Cad II

$\alpha = \pi - f \qquad \operatorname{tg} f = \frac{b}{|a|}$

III $M \in$ Cad III

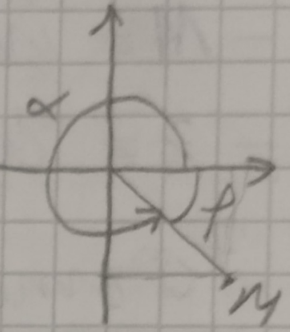
$\alpha = \pi + \varphi \quad tg\,\varphi = \frac{|b|}{|a|}$

$\alpha =$



IV $M \in$ Cad IV

$\alpha = 2\pi - \varphi \quad tg\,\varphi = \frac{|b|}{a}$



① Operații cu nr $\mathbb{C}$

① Înmulțirea

$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$

$z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

② Împărțirea

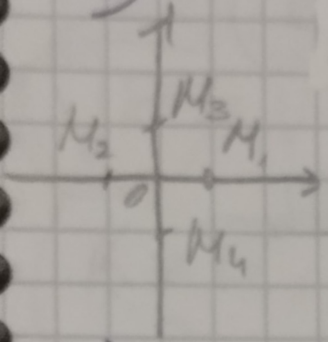
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$$

③ Puteri

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

(1) Forma trig pt următoarele nr

I) $z = 1 \Rightarrow z = 1 + 0i \Rightarrow M(1, 0)$



$r = |z| = 1; \ \alpha = 0$

$z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$= \cos 0 + i \sin 0$

II) $z = -1 \Rightarrow z = -1 + 0i \Rightarrow M(-1, 0)$

$\alpha = \pi \quad |z| = 1 = r$

$z = \cos \pi + i \sin \pi =$

III) $z = i \Rightarrow z = 0 + i \Rightarrow M(0, 1)$

$\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}; r = 1$

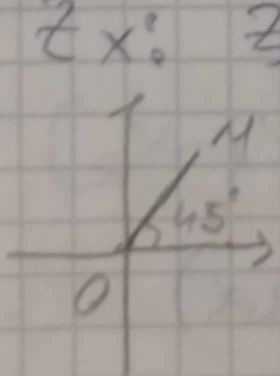
$z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

IV) $z = -i \Rightarrow z = 0 - i \Rightarrow M(0, -1)$

$r = 1, \ \alpha = \frac{3\pi}{2}$

$z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

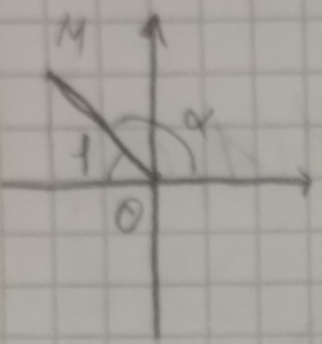
Ex: $z_1 = 1 + i \Rightarrow M(1, 1) \in$ Cad I



$\alpha = 45^\circ \quad r = \sqrt{2}$

$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$

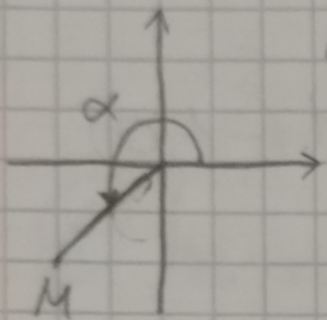
$z_2 = -1+i \Rightarrow M(-1,1) \in$ Cad II



$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad r = \sqrt{2}$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

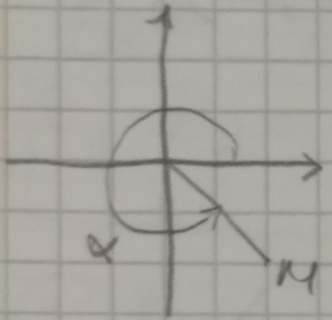
$z_3 = -1-i \Rightarrow M(-1,-1) \in$ Cad III



$\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad r = \sqrt{2}$

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$z_4 = 1-i \Rightarrow M(1,-1) \in$ Cad IV



$\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}; \ r = \sqrt{2}$

$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

4) Operații cu nr $\mathbb{C}$

1) Înmulțirea ~~$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2$ (~~

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)\right)$

2) Împărțirea

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)\right)$

3) Puteri $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin(n\alpha))$

④ $\sqrt{\ }$ Extragerea $\sqrt{\ }$ din nr $\mathbb{C}$ în formă trig

$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$

$k = \overline{0, n-1}$

$\to z_k$

Ex: $z = 1+i \quad \sqrt[3]{z} = ?$

$z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$

$k = \overline{0, 2}$

$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$

② Ecuații binome

$x^n = a, \quad n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$

- pt a rezolva o ec binomă parcurgem următorii pași

1) scriem pt (a) forma trig

2) Extragem $\sqrt[n]{\ }$ din a

3) Dăm lui k toate val. și obținem sol ecuațiilor

Ex: $x^3 = 1+i$

$x^3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

~~k~~ $x_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$

$k = \overline{0,2}$

~~k~~ $x_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$x_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$x_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$

!Obs: Rădăcinile de ordin n ale unității ($x^n = 1$)

$x_k = \cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi+0}{n}$

$x^2 = 1 \Rightarrow x < \begin{matrix}1\\-1\end{matrix}$

$x^3 = 1 \Rightarrow x = \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$

ε $\quad -\varepsilon$

$x^3 = 1$ — Notăm cu ε răd. de ordin 3 a rel.

$$\begin{cases} \varepsilon^3 = 1 \\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \end{cases}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

③ Formula lui Moivre

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

fișa 26: **Geometrie analitică**

Sistemul de axe ortogonale

xOy = |sistem cartezian|

Ox = abscisa

Oy = ordonata

① Lungimea segmentului:

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

② Mijlocul unui segment:

M – mijlocul segmentului AB

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

③ Centrul de greutate în Δ

G – Centrul de greutate în ΔABC

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$

$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Obs: Într-un Δ sin e tot timpul > 0

$M \in (AB)$ ai $\frac{AM}{MB} = k$ at

$$x_M = \frac{x_A + k x_B}{1+k} \qquad y_M = \frac{y_A + k y_B}{1+k}$$

Ec unei drepte în plan este de forma $\underbrace{ax + by + c = 0}_{d:}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$M \in d \Leftrightarrow a x_M + b y_M + c = 0$

$\underbrace{f(x)}_{y} = mx + n$ are graficul o dr

$y = mx + n \;/ \cdot t$ ec unei dr

$\underbrace{mt}_{a}x \underbrace{- t}_{b}y + \underbrace{nt}_{c} = 0$

$ax + by + c = 0$

④ Ec dreptei determinată de pctle A și B

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow (y - y_A)(x_B - x_A) = (x - x_A)(y_B - y_A)$$

Obs: $ax + by + c = 0$ ec dreptei d
$M(x_M; y_M)$

Dacă $ax_M + by_M + c = 0$ at $M \in d$
Dacă $ax_M + by_M + c > 0$ at $M \in$ unui semiplan dit de d
Dacă $ax_M + by_M + c < 0$ at $M \in$ celuilalt semiplan dit de d

Pe segmentul OA sunt $(|a|, |b|) + 1$ pct de coord întregi
cmmmdc
$O(0, 0)$, $A(a, b)$

Nr de pct cu coord întregi de pe AB este $(|c-a|, |d-b|)$
$A(a, b)$ $B(c, d)$

5 Forma normală a unei dr

$$y = -\frac{a'}{b'} \cdot x + -\frac{c'}{b'}$$

$d_1 : ax + by + c$
$d_2 : a'x + b'y + c'$

Fișa 27: Panta unei drepte

Fie d în plan

$(\widehat{Ox, d}) = \alpha$ și se numește

coeficientul unghiurilor pt d

$\alpha \in [0, u]$

① **Definiție:**

$tg\,\alpha \overset{not}{=} m$ = panta dreptei d

② **Proprietăți:**

1) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

2) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

(pt $d_1, d_2 \nparallel$ cu axele)

3) $m_{Ox} = 0$ – Orice dr $\parallel$ cu Ox are ec $y = nr$

m_{Oy} nu există – Orice dr $\parallel Oy$ are ec $x = nr$

4) Ec dr care trece prin $M(x_M, y_M)$ și are panta m este

$$\boxed{y - y_M = m(x - x_M)}$$

5) Dr de ec $y = mx + n$ are panta m

Dr de ec $ax + by + c = 0$ are panta $-\frac{a}{b}$

6) Panta dr AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Fișa 28: Poziția relativă a 2 drepte

$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$

G - centru de greutate (∩ mediane)

H - ortocentru (∩ înălțimi)

O - centru cerc circumscris Δ (∩ mediatoare) ($OA = OB = OC = R$)

I - centru cerc înscris în Δ (∩ bisectoarelor)

① Proprietăți

1) $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

2) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1 = m_2$

3) $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ unde x_A, y_A sunt sol sistemului

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

② Distanța de la un punct la o dreaptă

$M(x_M, y_M)$; $d: ax+by+c=0$

- $dist(M, d) = \frac{|a x_M + b y_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

③ Ec unei dr date de un pct și o direcție

$y - y_A = m(x - x_A)$

④

$d_1: y = ax+b$, 1) $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow a = a'$

$d_2: y = a'x+b'$ 2) $d_1 \perp d_2 \Rightarrow a \cdot a' = -1$

⑤

fișa 29:

Vectori în geometrie analitică

Fie $A(1,0) \in O_x$, $B(0,1) \in O_y$ notăm $\vec{i} = \vec{OA}$, $\vec{j} = \vec{OB}$ } versori

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

Orice vect din plan $\vec{v}$ se exprimă în fct de $\vec{i}$ și $\vec{j}$ $\boxed{\vec{v} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j}}$ $p, q \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = \vec{v}_{Ox} + \vec{v}_{Oy}$

$\vec{v}_{Ox} \parallel O_x \Rightarrow \vec{v}_{Ox} = p \cdot \vec{i}$

$\vec{v}_{Oy} \parallel O_y \Rightarrow \vec{v}_{Oy} = q \cdot \vec{j}$

① Proprietăți

① $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

② $\vec{v} = p\vec{i} + q\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{p^2 + q^2}$

③ $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = p_1\vec{i} + q_1\vec{j} \\ \vec{u} = p_2\vec{i} + q_2\vec{j} \\ \vec{u} \parallel \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2}$ ($\vec{v} = k \cdot \vec{u} \Leftrightarrow p_1\vec{i} + q_1\vec{j} = kp_2\vec{i} + kq_2\vec{j}$)

($\Leftrightarrow$ coliniare)

② Def

④ Fie $\vec{v} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$, $\vec{u} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

Prod scalar dintre $\vec{v}$ și $\vec{u}$ este nr real $|\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\angle(\vec{u}, \vec{v})$

Obs: $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

③ $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow p_1p_2 + q_1q_2 = 0$

$\vec{v}\vec{u} = x_1x_2 + y_1y_2 = |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$

$\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$ poate fi:

- ascuțit $\Leftrightarrow \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) > 0$

  $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

- drept $\Leftrightarrow \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) = 0$

  $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

- obtuz $\Leftrightarrow \cos\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) < 0$

  $\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} < 0$

③ form cos

$$\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \boxed{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$$

Fișa 30: Elemente de combinatorică

① Definiție

Fie A o mulțime cu n elemente

1) Orice ordonare a mulțimii A se numește **permutare** de n elemente

Nr permutărilor $= n! = P_n$

2) Orice submulțime cu k elem ale lui A se numește **combinare** de n elemente luate câte k

Nr combinări: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

3) Orice submulțime ordonată cu k elemente a lui A se numește **aranjament** de n elemente luate câte k.

Nr aranjamente $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

② Proprietăți

1) $0 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}^*$

2) $0! = 1$

3) $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$

4) $C_n^k = C_n^{n-k}$ (form combinărilor complementare)

5) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ (form de recurență)

6) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 + C_n^2 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$

7) $C_n^a = C_n^b \iff a = b$ sau $a + b = n$

8) Δ lui pascal

$11^0 \quad 1 = 2^0$

$11^1 \quad 1 + 1 = 2^1$

$11^2 \quad 1 + 2 + 1 = 2^2$

$11^3 \quad 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$

$11^4 \quad 1 \; 4 \; 6 \; 4 \; 1 = 2^4$

C_0^0

$C_1^0 \quad C_1^1$

$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

fișa 31: Probleme de numărare

① Teoremă

fie $a, b \in \mathbb{Z}$. De la a la b sunt $b-a+1$ nr $\in \mathbb{Z}$

② Regula produsului (sumei)

Dacă x poate fi ales în m moduri și y poate fi ales în n moduri (nr de moduri în care y poate fi ales NU depinde de valoarea lui x) atunci perechea x [și] y poate fi aleasă în $m \cdot n$ moduri (pereche x [sau] y poate fi aleasă în $m+n$ moduri)

Obs 1) Dacă $f: A \to B$, A & B fct cu același nr de elemente n, atunci

- f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f bij
- nr f inj = nr f surj = nr f bij
- A_n^n

2) Pt o numărare de elemente ordonate strict cresc (descresc) folosim combinările (nu regula produsului)

Fișa 32: Binomul lui Newton

① Definiție:

$$\underbrace{(a+b)^n}_{\text{binom}} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k}_{T_{k+1}}$$ → dezvoltare binom

② Term. general

$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, $k = \overline{0, n}$

③ Rangul term

term liber = term independent de x
= term care nu conține x

Rang term = al câtelea term are condiția (ex: al câtelea term nu îl conține pe x)

Obs: $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ pt rang
$T_{k+1} = C_n^{n-k} \cdot a^n \cdot b^{n-k}$ nu poate fi folosit pt rang

④ Coef binomiali

$C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ = coef binomiali

XI-A →

fișa 33!

Permutări

① **Definiție**: Orice funcție bijectivă $\sigma: \{1, 2, 3, ..., n\} \to \{1, 2, 3, ..., n\}$ se numește permutare de ordin n

② **Notație**

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$

2) În general, permutările se notează cu $\sigma, \tau, \delta, \theta$, etc

3) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 1 & 2 & 3 & ... & n \end{pmatrix}$ permutare identică (fct)

4) S_n - mulțimea permutărilor de ordin n
- are n! elemente

③ **Înmulțirea (compunerea) permutărilor**

Fie $\sigma, \tau \in S_n \Rightarrow \sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$

$$\overset{\sigma}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}} \circ \overset{\tau}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

← de la dr la st

!!! $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$

Proprietăți:

1) Înmulțirea permutărilor este asociativă: $\sigma \circ (\tau \circ \delta) = (\sigma \circ \tau) \circ \delta$

$\forall \sigma, \tau, \delta \in S_n$

2) Înmulțirea permutărilor **NU** este comutativă (în general)

3) e este elem neutru la înmulțire

$\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma$

4) Orice permutare are inversă

$\forall \sigma \in S_n, \exists \sigma^{-1} \in S_n$ ai $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e$

ex: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

invers $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ordonam}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ciornă

Obs: $\sigma \circ x = \tau \Leftrightarrow x = \sigma^{-1} \circ \tau$

$x \circ \sigma = \tau \Leftrightarrow x = \tau \circ \sigma^{-1}$ ec diferite

④ **Inversiuni**: Fie $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2 ... n\}$

Perechea (i, j) se numește inversiune pt σ dacă $\begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$

Nr inversiunilor lui σ se notează cu $m(\sigma)$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $(2,3),(4,5),(1,5) \ldots$ inversiuni

!Obs: $\sigma(k)$ ne dă atâtea inversiuni câte nr. sunt mai mici în dreapta sa pe rândul 2

$m(\sigma) = 1+3+2+2+0+0 = 8$

⑤ Semnul permutărilor

Nr $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ se numește semnul (signatura) permutării σ

Dacă $\varepsilon(\sigma) = 1 \Rightarrow \sigma$ permutare pară

Dacă $\varepsilon(\sigma) = -1 \Rightarrow \sigma$ permutare impară

Proprietăți: $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \circ \varepsilon(\tau)$

$\varepsilon(\sigma^n) = [\varepsilon(\sigma)]^n$

⑥ Transpoziții: σ se numește transpoziție dacă $\begin{cases} \sigma(i) = j \\ \sigma(j) = i \\ \sigma(k) = k \ \forall k \neq i, j \end{cases}$ notat (i,j)

Ex:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ transpoziție $(3,6)$

Obs: ① $(i,j)=(j,i)$

② $(i,j)^2=e$; $(i,j)^{-1}=(i,j)$

③ orice permutare de ord n se poate scrie ca prod de transpoziții de ordin n

$(2,5)\circ(1,2)$ in S_5

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&3&4&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&4&2\end{pmatrix}$$

Matrice

① Definiție:

O fct $f: \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \to \mathbb{C}$ se numește matrice cu m linii, n coloane, și elem nr complexe

Ex: $\{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,n),(2,1),\dots,(m,n)\}$

$$\left.\begin{array}{l} f((1,1)) \overset{not}{=} a_{11} \in \mathbb{C} \\ f((1,2)) \overset{not}{=} a_{12} \in \mathbb{C} \\ \dots \\ f((m,n)) = a_{mn} \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \overset{not}{\Rightarrow} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

② Notații

① $M_{m,n}(X)$ - mulțimea matricilor cu m linii, n coloane, și elem din X

Pt $m=n$ avem $M_n(X)$ - mulțimea matricilor pătratice de ordin n

② Matricea cu toate elem zero se numește **matricea nulă** notată cu $O_{m,n}$ sau $O_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $O_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$

Elem $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formează <u>diagonala principală</u>. Suma lor $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \overset{\text{not}}{=} T_r(A)$ se numește <u>urma matricii</u> A

Elem $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ form <u>diagonala secundară</u>

④ Matricea cu 0 sub elem peste diag princip se numește matrice triunghiulară (diagonală)

⑤ Matricea cu 1 pe diag princip și 0 în rest se numește <u>matrice unitate</u> (I_n)

⑥ Notăm A, B, X, Y, ... pt matrice

$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ $A = (a_{ij})$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ – notație comună

!Obs: 2 matrici sunt = dacă au aceleași elemente corespondente
$A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

③ Adunarea a 2 matrice

Fie $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$
$B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

Definim $A + B = C \in M_{mn}(\mathbb{C})$ unde
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+2 & 1+3 \\ 0+1 & 3+5 & 1+2 \end{pmatrix}$

Proprietăți:

① „+" matricilor e com și aso
② Matricea nulă e elem neutru
③ Orice matrice $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ are o matrice opusă $-A = (-a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$

④ Înmulțirea matricilor cu un scalar

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

Def. $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$

Ex: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Proprietăți:

① $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta(\alpha A) = A(\alpha \beta)$

② $0 \cdot A = O_{mn} \quad \forall A \in M_{mn}(\mathbb{C})$

⑤ Înmulțirea matricilor

Fie $A = (a_{ij}) \in M_{mn}(\mathbb{C})$ și

$B = (b_{jk}) \in M_{np}(\mathbb{C})$

Definim $A \cdot B = C = (c_{ik}) \in M_{mp}(\mathbb{C})$

unde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$

Ex: (4,3) (3,3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 7 \\ 8 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$c_{32} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j} \cdot b_{j2} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{23} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32}$$

$$= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -2$$

Proprietăți:

① Înmulțirea matricelor este asociativă

$(A \cdot B) \cdot C = A(B \cdot C)$

② Înmulțirea matricelor **NU** este (în general) comutativă

(3) I_n este element neutru la înmulțire

(6) Ridicarea la putere

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ ori}}$ $A \in M_p(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$

(I) pt matrice cu 3 linii și 3 coloane

a) prin inducție

b) folosind binomul lui Newton

1) pt matrice de forma A+B cu $A \cdot B = B \cdot A = O_B$

2) pt matrice cu același nr pe diag principală și 0 sub/deasupra ei ($A^n = (a \cdot I_3 + B)^n$)

(II) pt matrice cu 2 linii și 2 coloane

a) prin inducție

b) folosind matricea $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \pm\sin\alpha \\ \mp\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $ad - bc = 0$ at $A^n = (a+d)^{n-1} \cdot A$

Pt inducție: 1. găsim o regulă?
2. rezolv pt cel mai mic n
3. pp $P(k)$ adev
4. Dem pt $P(k+1)$

- pornești de la st la dr
sau
- de la dr la st
sau
- modif ambele părți ale ec deodată

(7) Transpusa matricei

$A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea
${}^tA=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ se numește
transpusa matricii A

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&9\end{pmatrix}$ ${}^tA=\begin{pmatrix}1&5\\2&7\\3&9\end{pmatrix}$ (liniile devin coloane)

(8) Împărțirea matricelor

$A:B=A\cdot B^{-1}$

$\left(\frac{A}{B}=A\cdot \text{inversa } B\right)$

pag 145

fișa 35!

Determinanți

① **Definiție**: Fie $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ MATRICE PĂTRATICĂ. Nr complex

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$$

se numește determinantul matricei A

Obs: 1) $A\in M_1(\mathbb{C})$ $A=(a) \Rightarrow \det A = |a| = a$ ← det nu modul

② **Calcul determinanți**:

1) $A\in M_2(\mathbb{C})$ $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $S_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$

σ_1, $\varepsilon(\sigma_1)=(-1)^0=1$ σ_2, $\varepsilon(\sigma_2)=(-1)^1=-1$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = 1\cdot a_{11}\cdot a_{22} + (-1)\cdot a_{12}\cdot a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

calcul det matrice 2 coloane/linii

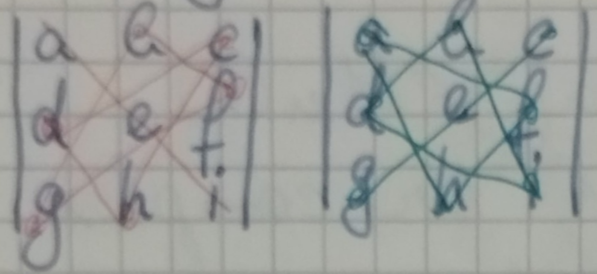
② Calcul det matrice 3 coloane/linii

a) Regula lui SARUS $A\in M_3(\mathbb{C})$

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - ahf - dbi$$

$$\begin{matrix} a & b & c\\ d & e & f\end{matrix}$$

b) Regula Δ



$aei+dhc+bfh-ceg-$
$-dbi-fha$

!Obs: 1) Det $(A \cdot B) =$ Det $A \cdot$ Det B

2) Dacă prima și ultima linie e aceeași la 3 matrici atunci det A + det B = det C

Proprietăți:

1) Det $A =$ Det$^t(A)$ $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$

2) Det$(A \cdot B) =$ Det $A \cdot$ Det B; Det$(A^n) = ($Det $A)^n$

3) Det$(\alpha \cdot A) = \alpha^n \cdot$ Det A $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ și A cu n linii n coloane

Într-un det putem scoate factor de pe o linie/coloană

La matrice se scoate factor de pe toate elem matricei

4) Dacă un det are 2 linii (coloane) = sau prop sau are o linie (coloană) nulă sau = cu o combinație liniară de de celelalte linii (coloane) atunci det = 0

Obs: Spunem că x este combinație liniară de $x_1, x_2 ... x_k$ dacă există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$ nu toate nenule a.î.
$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k \cdot x_k$

5) Dacă la o linie (coloană) adăugăm o combinație liniară atunci det nu se schimbă

6) Dezvoltarea a unui det după o linie (coloană)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

Dezvoltarea det după linia i

unde A_{ij} e complementul algebric al lui a_{ij}

7) Dacă într-un determinant inversăm 2 linii (coloane) consecutive, atunci det își schimbă sensul

8) Dacă un det are 0 sub sau deasupra diag principală atunci det = prod elem de pe diag principală $\Rightarrow \det I_n = 1 \; \forall n \geq 2$

9) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

NUMAI dacă diferă o SINGURĂ linie

$Det(A \pm B) \neq Det A + Det B$

③ Determinanți remarcabili

① Det Vandermonde

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$$

Obs:

1) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_j - a_i) =$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

3) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \xlongequal{\det A = \det({}^tA)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} =$$

semnul se schimbă când mutăm

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\det A = \det {}^tA} \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

② $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ba \end{vmatrix} \underset{C_3 = C_3 - C_1}{\overset{C_2 = C_2 - C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ bc & -c & -b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

la fel ca det Vandermonde

③ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \underset{C_3 = C_3 - C_1}{\overset{C_2 = C_2 - C_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^3 & a^2+ab+b^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \cdot (a+b+c)$

det Vandermonde $\cdot (a+b+c)$

④ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \overset{L_1 = L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

Fișa 36: # Matrice inversibilă

① **Definiție:** Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrice pătratică. Spunem că A este inversibilă dacă $\exists B \in M_n(\mathbb{C})$ a.î. $B \cdot A = A \cdot B = I_n$
$\therefore (B = A^{-1})$

Th: A inversibilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

② **Algoritm de aflare a inversei**

① Se calc $\det A \neq 0$

② Se determină ${}^tA$

③ Se calculează matricea adjunctă

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ unde A_{ij} e complementul algebric al elem a_{ij} din ${}^tA$

④ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ Din ${}^tA$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$

!Obs: 1) Ec $A\cdot X = B$ are sol $X = A^{-1}\cdot B$

$X\cdot A = B$ are sol $X = B\cdot A^{-1}$

pt A inversibile

2) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

3) $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversibilă at $\det(A^*) = (\det A)^{n-1}$

③ Aplicații în geometria analitică

$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$

1) Ec dr AB $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

2) ABC coliniare $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 1$

3) S ΔABC – Aria ΔABC

$S = \frac{1}{2}$ modul $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

Fișa 37: Rangul unei matrice

① **Definiție:** Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Un det de ordin k obținut din A prin eliminarea unor linii și coloane se numește minor de ordin k

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ minori de ordin 2 sunt $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ etc

NU este minor de ordin 2 $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

Spunem că rangul lui A este k (=)

1) există un minor nenul de ordin k

2) Toți minorii de ordin mai mare sunt nuli

Th: Rang A e k (=) ① ∃ minor nenul de ord k
② Toți minorii de ord k+1 care conțin minorul nenul sunt nuli

Obs:
1) $\text{Rang } A \leq \min\{m, n\}$
2) $\text{Rang } A = 0 \Leftrightarrow A$ = matricea nulă
3) A are liniile/coloanele prop (=) rang $A \in \{0, 1\}$

fișa 38

Mulțimi de puncte pe dreapta reală

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime

① **Minorant**: Nr real m se numește minorant pt A dacă $m \leq x$ pt $\forall x \in A$

Cel mai mare minorant se numește marginea inferioară a mulțimii A, notat inf A (infimum)

② **Majorant**: Nr real M se numește majorant pt A dacă $M \geq x$ pt $\forall x \in A$

Cel mai mic majorant se numește margine superioară a mulțimii A notată sup A (supremum)

Ex: $A = (0, 1]$ — $\inf A = 0 \notin A$
\ $\sup A = 1 \in A$

③ **Mărginire**: - Mulțimea A e mărginită inferior dacă are cel puțin 1 minorant

- Mulțimea A e mărginită superior dacă are cel puțin 1 majorant

Mulțimea A e mărginită dacă e mărginită inf și sup

$\exists m, M \in \mathbb{R}$ ai $m \leq x \leq M \; \forall x \in A$

Ex: $A = \{2, 3, 5, 7\}$ mărg

$B = [0, 7)$ mărg

$C = (1, +\infty)$ mărg inf

$D = (-\infty, 3)$ mărg sup

④ Vecinătate: Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$ o mulțime. Spunem că V este vecinătate pt x_0 dacă $\exists \varepsilon > 0$ ai $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset V$

Ex: $V = [0, 1] \Rightarrow$ V e vecinătate pt $\frac{1}{2}, \frac{123}{124}$, etc

nu e vecinătate pt 0, 1, 7, ...

Proprietăți: ① V_1, V_2 vecinătăți pt x_0 at $V_1 \cup V_2$ sunt vecinătăți pt x_0

② $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ At $\exists V_x$ vecinătate pt x

V_y vecinătate pt y

ai $V_x \cap V_y = \emptyset$

⑤ Punct de acumulare:

x_0 se numește punct de acumulare pt mulțimea A dacă $\forall V$ vecinătate pt x_0 avem $A \cap (V - \{x_0\}) \neq \emptyset$

Ex: $A = (0, 1]$ at mulțimea punctelor de acumulare e $[0, 1]$

Fișa 39: Șiruri de nr reale

① Definiție: Orice fct $f: \mathbb{N} \setminus A \to \mathbb{R}$ se numește șir de nr reale $\{0, 1, ..., k\}$

Ex: $A = \emptyset$, $A = \{1\}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$f(0) = a_0 (b_0, k_0, x_0, \alpha_0 ....)$

$f(1) = a_1$

⋮

$f(n) = a_n$

Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ șir de nr reale

$(x_n)_{n \geq 1}$

!!! Un șir are o ∞ de termeni

② Subșiruri

Fie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ un șir și $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ fct strict cresc. Șirul $f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se numește subșir al lui f

③ Monotonie

1) Spunem că $\overline{a_n}$ e monoton strict crescător dacă $a_{n+1} > a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_{n+1} \geq a_n$ at a_n este monotonă cresc)

2) Spunem că a_n e monoton strict descrescător dacă $a_{n+1} < a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_{n+1} \leq a_n$ at a_n e monotonă descresc)

Th: 1) $a_{n+1} - a_n \begin{cases} > 0 & \text{at str cresc} \\ < 0 & \text{at str descresc} \end{cases}$

2) $a_n > 0$ și $\frac{a_{n+1}}{a_n} \begin{cases} > 1 & \text{at str cresc} \\ < 1 & \text{at str descresc} \end{cases}$

④ Mărginire: Șirul se numește mărginit dacă $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ (și nu depinde de n) ai $m \leq a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

m → mărg inf M → mărg sup

Fișa 40: Limite de șiruri

① **Definiție:** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir și $l\in\mathbb{R}$. Spunem că limita șirului x_n e l dacă $\forall$ V vecinătate a lui l, $\exists\, n_V \in \mathbb{N}$ ai $x_n \in V\ \forall\, n \geq n_V$

sau

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ai $\underbrace{|x_n - l| < \varepsilon}_{l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon}$

Notație: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

citim: limită când n tinde la ∞ din x_n l

Obs: Orice interval $(a, +\infty)$ e vecinătate pt ∞

Orice interval $(a, -\infty)$ e vecinătat pt $-\infty$

Th: Limita unui șir (dacă există) e unică

② Convergență / divergență, monotonie

① Un șir cu limită finită se numește convergent

② Un șir cu limită infinită / fără limită se numește divergent.

Th: ① Un șir monoton mărginit e convergent (NU INVERS)

• Un șir convergent e mărginit (nu neapărat monoton)

② Un șir cresc nemărginit are limită $+\infty$. Un șir descresc nemărginit are limita $-\infty$

③ Dacă un șir are limita l, at orice subșir al său are limita l

Consec: Dacă un șir are 2 subșiruri cu lim ≠ at șirul ~~are~~ nu are limită

Th lui Weierstrass: Orice șir monoton și mărginit e convergent. Dacă un șir e cresc și mărginit superior, at e convergent

③ Dacă un șir e descresc și mărginit inferior

3) Operații cu limite:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

când au sens

Operații cu $\pm\infty$:

1) $x + \infty = +\infty + x = \infty$

$x - \infty = -\infty + x = -\infty$

2) $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $x \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$

4) $x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & x > 1 \\ 0, & x \in (-1, 1) \\ \nexists, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$

5) $\infty^{x} = \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Cazuri exceptate

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, \dfrac{0}{0}, \infty - \infty,$

$0 \cdot \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

6) $\log_a \infty = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0, 1) \end{cases}$

$\log_a 0 = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}$

7) $\log_e x \overset{not}{=} \ln x$

$\ln \infty = \infty; \ln 0 = -\infty$

8) $\sqrt{\infty} = \infty; \sqrt{-\infty} = -\infty$

atunci e convergent

(4) Rezolvare cazuri exceptate

1) Cazul $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se rezolvă în general

a) Scoțând forțat de la numărător respectiv numitor factor termenii care tinde mai repede la infinit

I exponențialul 7^{5n+2}, 2^{5n+1}, 3^{n+1} ---, (a^n, $a>1$)

II n la puterea cea mai mare n^4, n^5, n^3, $n^{\frac{5}{2}}$

III logaritmi

b) Folosind th (lema) Stolz-Cesaro

Lema Stolz-Cesaro: Dacă b_n nemărginit și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \text{ atunci}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$$

Th Stolz-Cesaro: Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sau $\frac{0}{0}$

și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

!Obs: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty})$ pt orice fct studiată

~~[illegible]~~: 2) $\log_a \infty = \begin{cases} \infty, & a>1 \\ -\infty, & a\in(0,1) \end{cases}$ și ~~log~~

$\log_a 0 = \begin{cases} -\infty, & a>0 \\ \infty, & a\in(0,1) \end{cases}$ operații cu limite

pt $a = e = 2,72\ldots \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ - nr lui Euler $\log_e x \overset{not}{=} \ln x$ - logaritm natural

$\ln \infty = \infty$; $\ln 0 = -\infty$

2) Cazul $\frac{0}{0}$ se rezolvă în general

a) cu Stolz-Cesaro

b) cu limite remarcabile

Th: fie x_n cu $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

At: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ 2) $\lim_{n\to\infty} \frac{tg\, x_n}{x_n} = 1$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{arcsin\, x_n}{x_n} = 1$ 4) $\lim_{n\to\infty} \frac{arctg\, x_n}{x_n} = 1$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$ 6) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$

7) $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+x_n)^{r}-1}{x_n} = r$

3) Cazul $0 \cdot \infty$ se rezolvă în general

a) punând în evidență dacă există limită remarcabilă pt expr cu limita 0

b) folosind relația

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} \frac{0}{0} = \frac{g}{\frac{1}{f}} \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

4) Cazul $\infty - \infty$ se rezolvă în general

a) la diferență de radicali: se amplifică din expresia conjugată

b) la diferență de logaritmi: se folosește proprietatea logaritmică

$$\log_a x_n - \log_a y_n = \log_a \frac{x_n}{y_n}$$

c) se scoate factor forțat termenul care tinde mai repede la ∞

5) Cazul 1^{∞} se rezolvă TOT timpul punând în evidență limita e

Th: ① Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

② Dacă $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+y_n\right)^{\frac{1}{y_n}} = e$$

Obs: $|a_n - a| \leq b_n \to 0 \Rightarrow a_n \to a$

criteriul majorării

$a_n \geq b_n \to \infty \Rightarrow a_n \to \infty$

$-\infty \cdot \infty = -\infty$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$-\infty \cdot (-\infty) = \infty$

$\frac{1}{0_+} = \infty \; ; \; \frac{1}{0_-} = -\infty$

$\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_+} \; ; \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0_-} \right)$

$-\frac{\infty}{0} = -\infty \cdot \frac{1}{0_\pm} \begin{cases} -\infty \cdot \infty \\ -\infty \cdot (-\infty) \end{cases}$

$\frac{\infty}{0} = \infty \cdot \frac{1}{0_\pm} \begin{cases} \infty \cdot \infty \\ \infty \cdot (-\infty) \end{cases}$

4) Alte teoreme pt calculul limitelor

Th cleștelui: Dacă $a_n \le b_n \le c_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$

$$\underset{\searrow\,\ell}{a_n} \le \underset{\Downarrow\,\ell}{b_n} \le \underset{\swarrow\,\ell}{c_n} \qquad \underset{\searrow\,\infty}{a_n} \le \underset{\Downarrow\,\infty}{b_n} \qquad \underset{\Downarrow\,-\infty}{a_n} \le \underset{\swarrow\,-\infty}{b_n}$$

Criteriul rădăcinii Dacă

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$

$\sqrt[n]{x_n} = x_n^{\frac{1}{n}}$

Fișa 41: Șiruri recurente

Termenul general e exprimat în funcție de termenii anteriori

① Recurența liniară de ordin I

$a_n = \alpha \cdot a_{n-1} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $a_1 = t$

$$\left.\begin{aligned} a_{n-1} &= \alpha \cdot a_{n-2} + \beta \;/\cdot \alpha \\ a_{n-2} &= \alpha \cdot a_{n-3} + \beta \;/\cdot \alpha^2 \\ &\dots \\ a_2 &= \alpha \cdot a_1 + \beta \;/\cdot \alpha^{n-2} \end{aligned}\right\} \oplus \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n = \alpha^{n-1} \cdot a_1 + \beta(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-2}) =$

$= \alpha^{n-1} \cdot t + \beta \dfrac{\alpha^{n-1} - 1}{\alpha - 1}$

suma unei prog geo

② Recurența liniară de ordin II

$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta a_{n-1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $a_1 = t$
$a_2 = s$

Ecuație caracteristică asociată relației de recurență

$x^2 = \alpha x + \beta$ $(x^{n+1} = \alpha x^n + \beta x^{n-1})$

ex: $a_{n+8} = \alpha a_{n+7} + \beta a_{n+6}$

Dacă $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ ec are 2 sol $x_1 \neq x_2$
Atunci $a_n = C_1 \cdot x_1^n + C_2 \cdot x_2^n$
Dacă $\Delta = 0 \Rightarrow$ ec are 2 sol $x_1 = x_2 \Rightarrow$
$a_n = C_1 \cdot x_1^n + C_2 \cdot x_2^n$
→ Unde C_1, C_2 se obțin din condițiile inițiale

③ Recurențe oarecare

$a_{n+1} = f(a_n)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) Când se cunoaște primul termen
- det următorii termeni, se deduce monotonia și se reduce prin inducție
- se calc pe ciornă eventuala limită și se demonstrează prin inducție mărginirea

b) Când primul term e unui interval
- se demonstrează ~~când~~ prin inducție că toți term ∈ intervalului
- monotonia se dem clasic $a_{n+1} - a_n$?
sau $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ - ?

Fișa 42: Limite de funcții

① **Definiție** Fie $f: \Delta \to \mathbb{R}$, x_0 pct de acumulare pt Δ

Spunem limita fct f în pct x_0 este l dacă pt orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 ai $f(x) \in V$, $\forall x \in U$

Sau

Limita fct f în x_0 este l dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ ai $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\forall x$ cu $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$

Sau

Lim fct f în x_0 este l dacă pt $\forall$ șir x_n cu $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$

Notații: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

2) Operații utile cu limite de fct

1) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

4) $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

! Obs: $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = ls(x_0) = f(x - x_0)$

→ Limita la stânga în x_0

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = ld(x_0) = f(x + x_0)$

Limita la dreapta în x_0

→ Limite laterale

Th: Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ <=>

<=> $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$

folosim să arătăm că fct nu are lim în x

La limite $\begin{cases} \frac{l}{0_{\pm}} = \pm\infty \\ \frac{l}{\pm\infty} = 0 \end{cases}$

Lecția 43: Limitele unor fct elementare

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ← fct polinominală

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_k x^k + \dots + a_0) = a_k (\pm\infty)^k$$

② $f: D \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{a_k x^k + \dots + a_0}{b_s x^s + \dots + b_0} \overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=}$

a) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_k x^k + \dots + a_0}{b_s x^s + \dots + b_0} \overset{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}{=} \begin{cases} \dfrac{a_k}{b_s} \cdot (\pm\infty)^{k-s}, & k > s \\ 0, & k < s \\ \dfrac{a_k}{b_s}, & k = s \text{ (rap coef)} \end{cases}$$

b) Dacă $\lim_{x \to x_0} \dfrac{a_k x^k + \dots + a_0}{b_s x^s + \dots + b_0} \overset{\frac{0}{0}}{=}$

atunci fracția se simplifică prin $x - x_0$

→

③ Polinom de grad k: = (cea mai mare putere a lui x) cu coef complecși

$g = b_s \cdot x^s + \dots + b_0$ $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} k = s \\ \text{și} \\ a_i = b_i \end{cases}$

$f(x) = a_k x^k + \dots + a_0$ - f et polinominală

Th împărțirii cu rest:

Dacă f, g 2 polinoame, at există și sunt unice polinoamele q și r ai $f = g \cdot q + r$ unde $r <$ grad g

ex: $f = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1$

$g = x^2 - x + 1$

$f : g = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1 \mid x^2 - x + 1$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1 & x^2 - x + 1 \\
\hline
 & -x^4 + x^3 - x^2 & x^2 - 4x - 3 \text{ (cât = q)} \\
\hline
/ & -4x^3 + x^2 + 4x - 1 & \\
 & +4x^3 - 4x^2 + 4x & \\
\hline
/ & -3x^2 + 8x - 1 & \\
 & +3x^2 - 3x + 3 & \\
\hline
/ & 5x + 2 & - \text{rest} = r
\end{array}
$$

(1°6')

(ii) Schema lui Horner

(doar pt împ prin x-a)

$f = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$

$g = x - 2$

coef de împ

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	
	1	5	-2	1	4	
a=2	1	7	12	25	54	rest

a=2   a=14   a=24   a=50

coef cât $\Rightarrow$ cât $= x^3 + 7x^2 + 12x + 25$

rest $= 54$

$\frac{1}{0} = \begin{cases} \infty \text{ pt } \frac{1}{0+} \\ -\infty \text{ pt } \frac{1}{0-} \end{cases}$ unde semnul pt 0 se obț din tabelul de semn al numitorului

ex: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{2x+1}{x^2-x-2} = \frac{5}{0} = 5 \cdot \frac{1}{0} = -\infty$

x	$-\infty$			-1		$\to 2$			$+\infty$
x^2-x-2		+	+	0	-	-	0	+	+

$\Delta \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

③ $f: \mathbb{R} \to (0, x)$ $f(x) = a$ $a > 0, a \neq 1$

$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & a \in (0, 1) \end{cases}$ $\lim_{x \to \infty} e^x = e^{\infty} = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = e^{-\infty} = 0$

④ $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = \ln x$

$\lim_{x \to \infty} \ln x = \ln \infty = \infty$

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = \underbrace{\ln 0}_{\text{notație}} = -\infty$

⑤ $\text{arctg}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\text{arcctg}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$\lim_{x \to \infty} \text{arctg}\, x = \text{arctg}\, \infty = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to -\infty} \text{arctg}\, x = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to \infty} \text{arcctg}\, x = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \text{arcctg}\, x = \pi$

⑥

⑥ sin, cos, tg, ctg **nu** au lim la $+\infty$ și $-\infty$

sin, cos : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

tg : $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ → $\cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup ...$

ctg : $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$

$\sin x, \cos x \in [-1, 1]$

ex: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{3x-2} + \sin x = \frac{2}{3} + nr[-1, 1] \Rightarrow$
$\Rightarrow \nexists \lim$

$\lim_{x \to \infty} x + \sin x = \infty + nr \in [-1, 1] = \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{nr \in [-1, 1]}{\infty} = 0$

} în aceste cazuri sin x nu influențează

Obs: 1) $\frac{0}{0}$ cu diferență de $\sqrt{\ }$ se rezolvă amplificând cu expresiile conjugate și apoi simplificând prin $(x - x_0)$

2) La funcții NU avem Stolz-Cesaro

Limite remarcabile

Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ atunci

① $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

Trebuie să fie $\frac{0}{0}$ altfel nu e limită remarcabilă

② $\lim_{x \to x_0} \frac{tg\, f(x)}{f(x)} = 1$

③ $\lim_{x \to x_0} \frac{\arcsin f(x)}{f(x)} = 1$

④ $\lim_{x \to x_0} \frac{arctg\, f(x)}{f(x)} = 1$

⑤ $\lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$

⑥ $\lim_{x \to x_0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln a$

⑦ $\lim_{x \to x_0} \frac{(1 + f(x))^r - 1}{f(x)} = r$

Obs: În general pt $\frac{0}{0}$ cu $\sqrt{\ }$ se folosește expr conjugată dar nu ai expr conjugată pt

(12) $\sqrt[2]{\ } - \sqrt[3]{\ }$

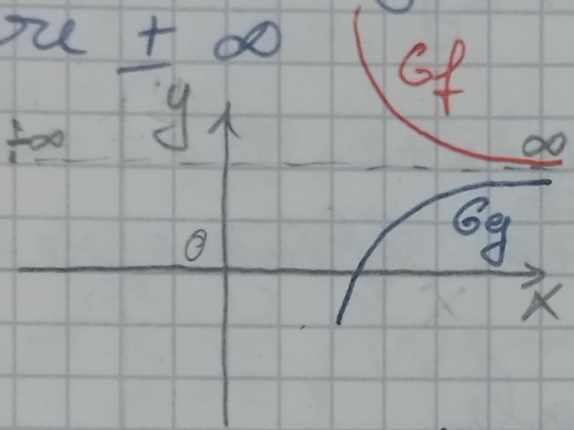
fișa 44: **Asimptote**

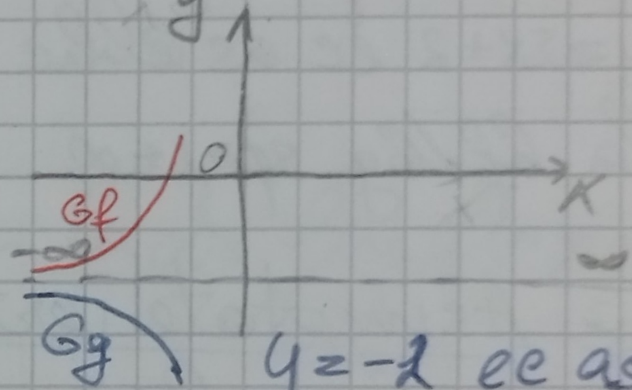
Fie $f: D \to \mathbb{R}$

① Asimptote orizontale

Dacă $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ atunci dreapta de ecuație $y = a$ se numește asimptotă spre $\pm\infty$

Ex $\pm\infty$





$y = 2$ ec as oriz la Gf/Gg spre $+\infty$

$y = -1$ ec as oriz la Gf/Gg spre $-\infty$

② Asimptote oblice

Dacă $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ și $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbb{R}$ atunci dr de ec $y = mx + n$

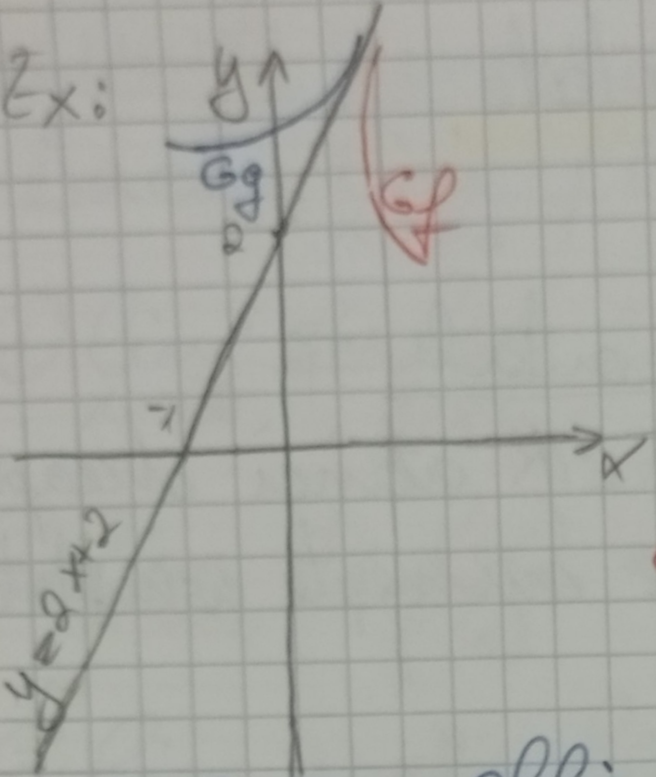
se numește asimptotă oblică spre $\pm\infty$

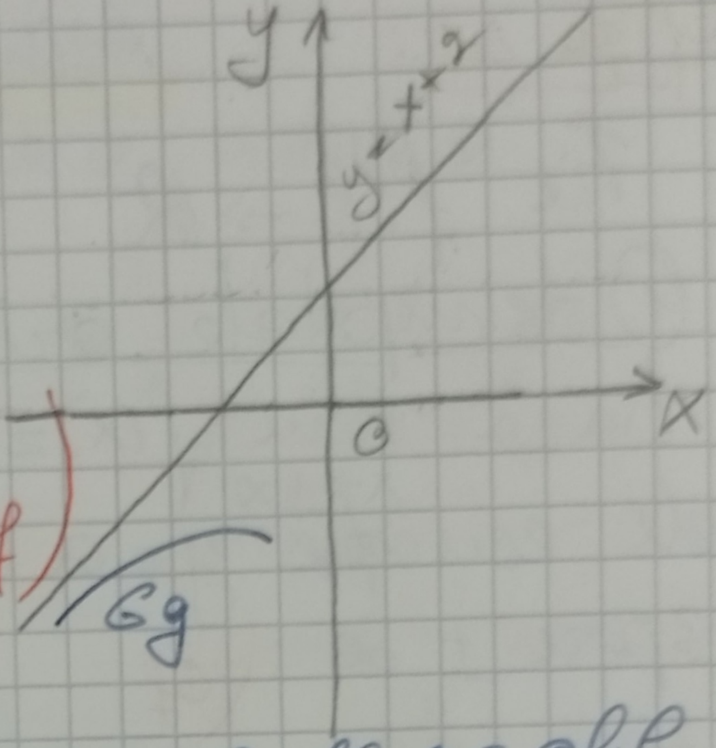
Dacă $m = 0$ at e as ~~vert~~ oriz

$n \neq 0 \in \mathbb{R}$ ~~Fals~~

(My)

Ex:





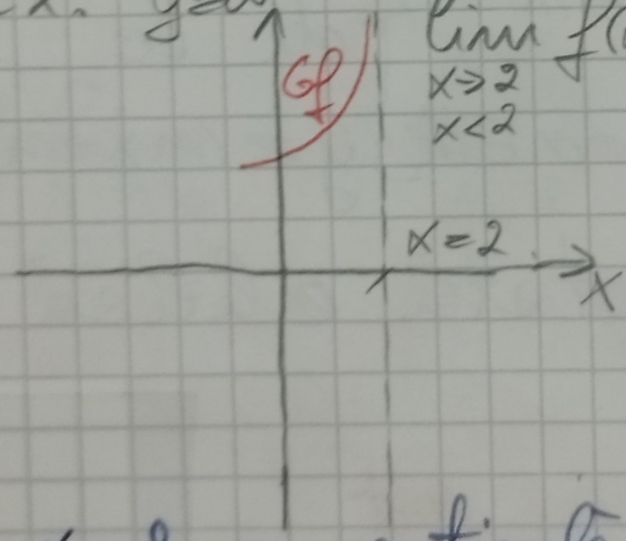
$y=2x+2$ ec as oblic la Gf/Gg spre $+\infty$

$y=x+2$ ec as obl la Gf/Gg spre $-\infty$

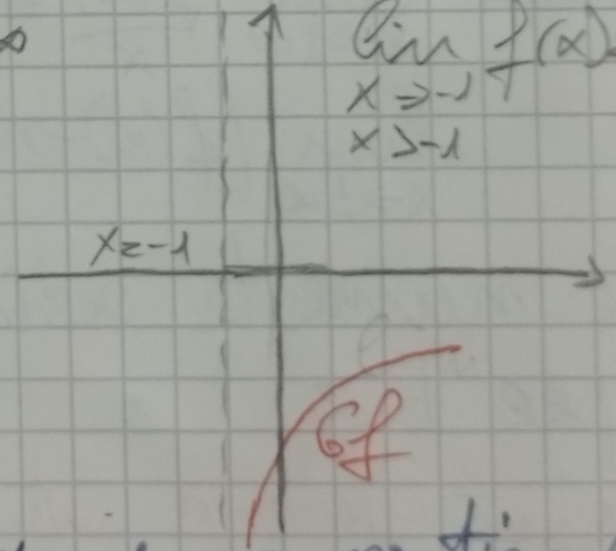
③ Asimptote verticale

Dacă $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0 \\ (x>x_0)}} f(x) = \pm\infty$ atunci dr de ec $x=x_0$ se numește as verticală la stânga (dreapta)

Ex: $y=\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \infty$

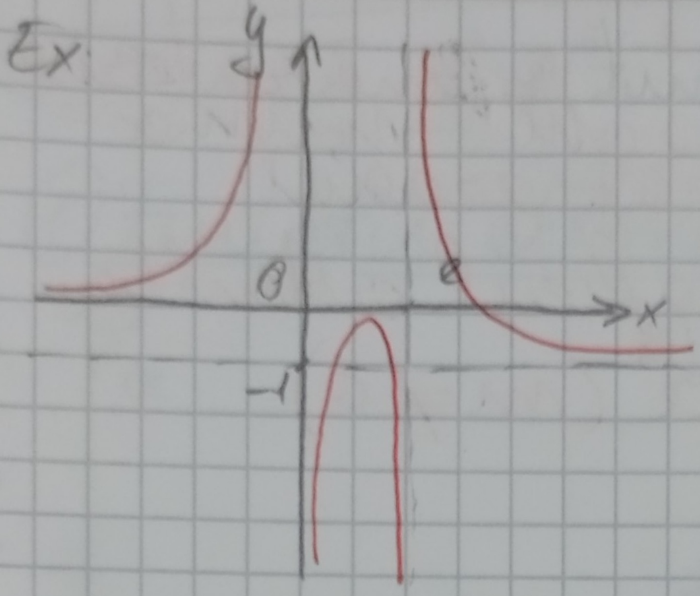


$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\infty$

$x=2$ as verticală la stânga

$x=-1$ as verticală la dreapta

Ex



$y=0$ ec as oriz spre $-\infty$ $\left(\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\right)$

$x=0$ ec as vert

- la st $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=+\infty$
- la dr $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$

$y=-1$ ec as oriz spre $+\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$

$x=2$ ec as verticală

- la st $\lim_{x\to 2} f(x)=-\infty$
- la dr $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\infty$

Obs: 1) As oriz și obl **NU** există simultan la aceeași ramură $+\infty$ sau $-\infty$ (dacă există A_{or} nu există A_{ob})

2) Asimptotele le căutăm la capetele deschise ale intervalelor domeniilor de definiție

3) Dacă domeniul $=\mathbb{R}$ nu există As vert (trebuie scăzut măcar un punct ex: $\mathbb{R}-\{1\}$)

Obs 1) Dacă gradul numărătorului e mai mare decât gradul numitorului, graficul admite asimptotă oblică ($m \neq 0$)

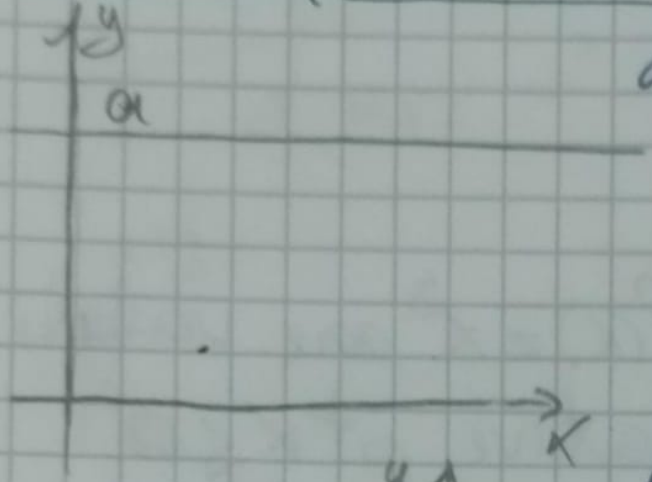
ex: $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

2) Dacă gradul numărătorului = cu gradul numitorului graficul f-ței admite asimptotă orizontală ($m = 0$)

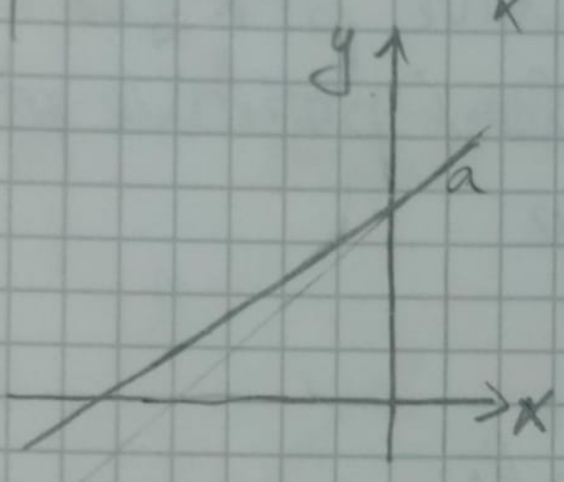
3) Asimptota verticală se găsește în pct în care se anulează numitorul

Fișa 45: Grafice de funcții

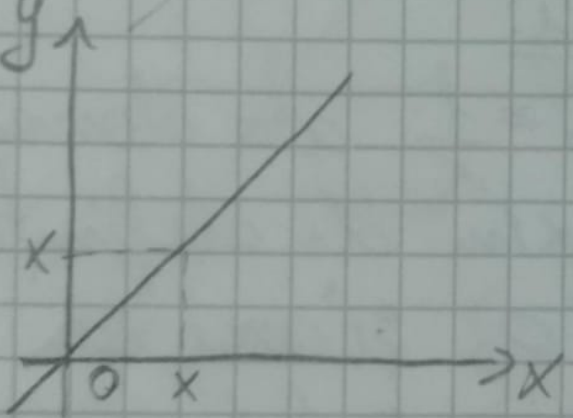
(1) Funcții elementare



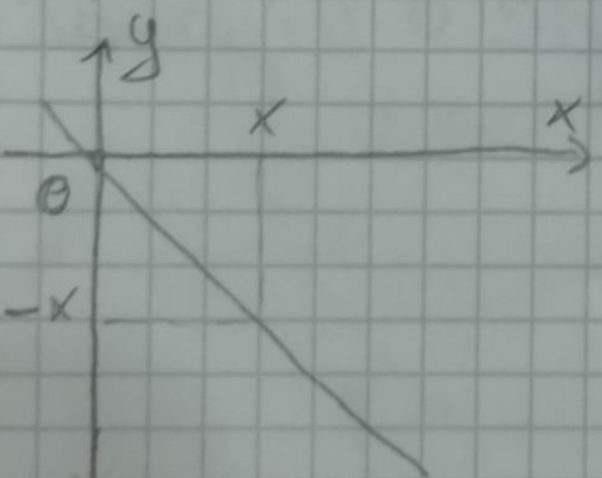
a) funcție constantă (polinom grad 0)
$f(x)=a$ are grafic $\parallel$ cu axa Ox



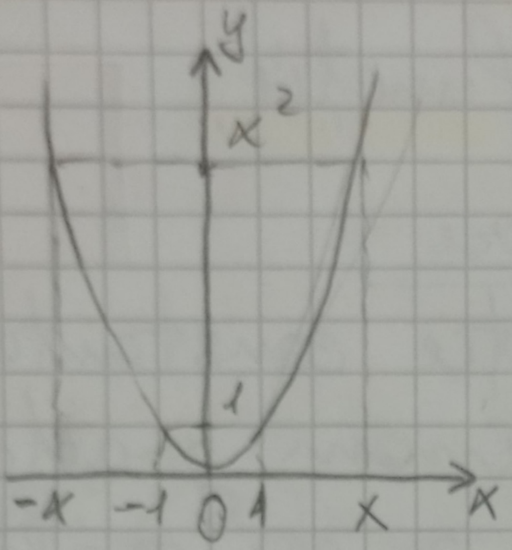
b) funcție liniară (polinom grad I)
$f(x)=ax+b$ are grafic o dreaptă



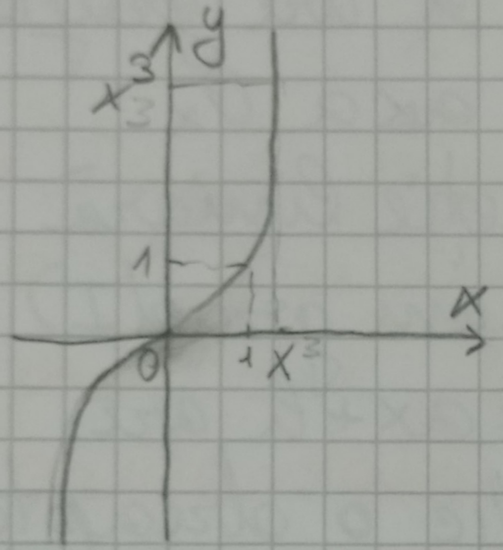
c) Dacă $a=1$ și $b=0$
$f(x)=x$ atunci se obține fct identică



d) Dacă $a=-1$ și $b=0$ se obține fct $f(x)=-x$ al cărei grafic e bisectoare la a doua

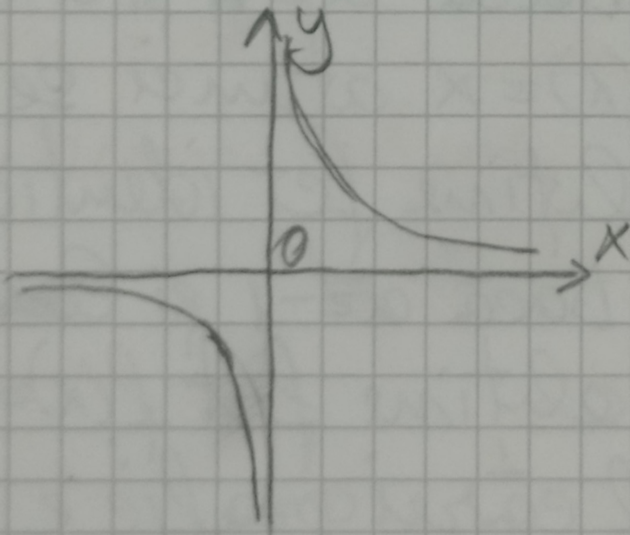


e) $f(x)=x^2$ are numai valori pozitive

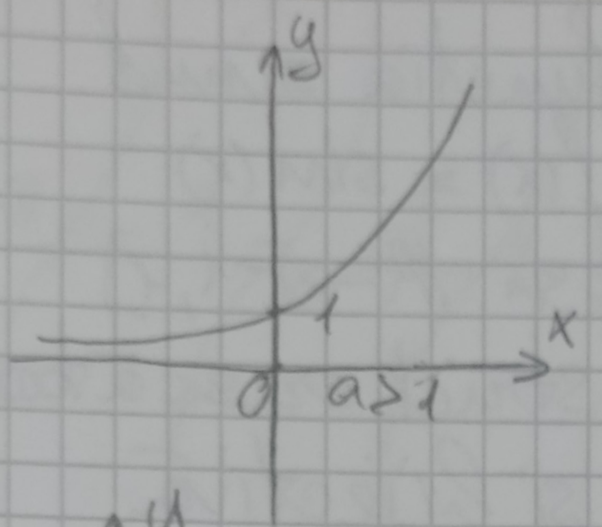


f) $f(x)=x^3$ are valori negative pt $x \le 0$ şi valori pozitive pt $x \ge 0$

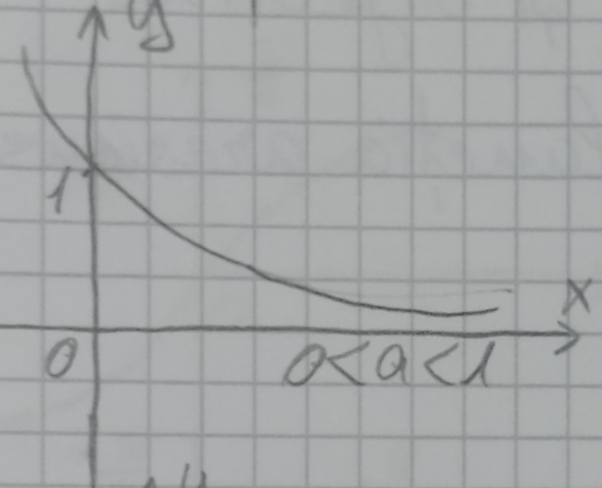
② Funcţii raţionale:



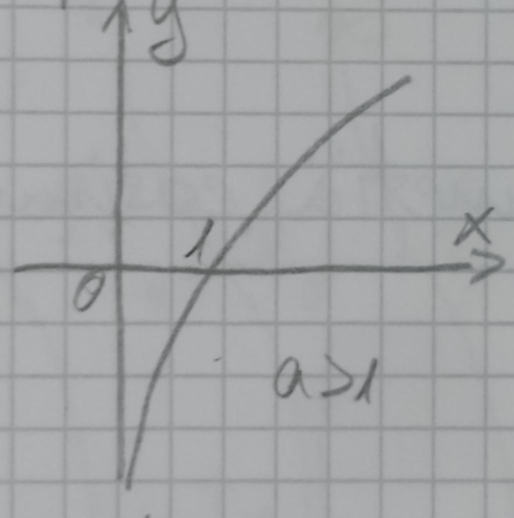
$f(x)=\frac{1}{x}$ are domeniu maxim de definiţie $R \setminus \{0\}$ şi are ca grafic o hiperbolă

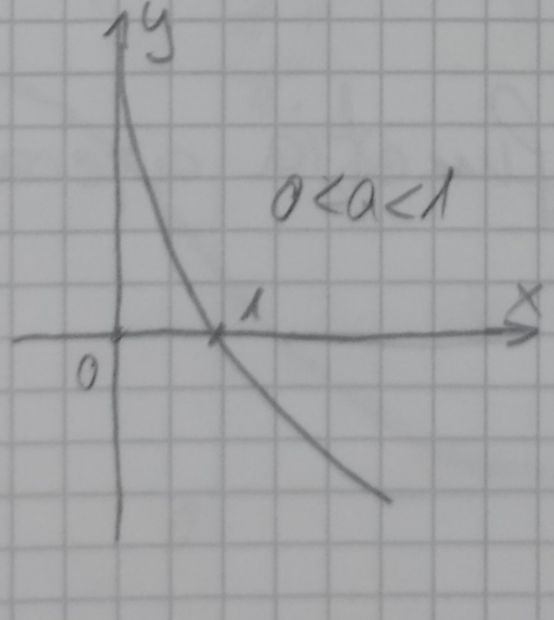


fct exponențială
$f(x) = a^x$ unde
$a>0$ și $a \neq 1$ domeniu
său maxim de def
fiind toată dreapta
Fct exponențială ia
numai valori strict
pozitive
$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$



funcție logaritmică
$f(x) = \log_a x$ $a>0$, și
$a \neq 1$ $g(x) = a^x$
Domeniul maxim
de def e semidreapta
$(0, +\infty)$ (log are sens
doar pt nr str
pozitive). Fct log
poate lua val poz
și negative
$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



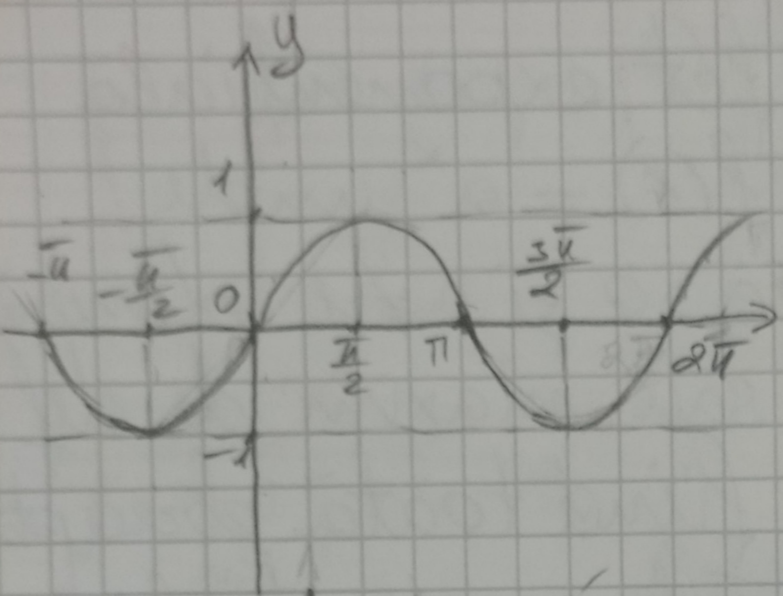


funcția sinus

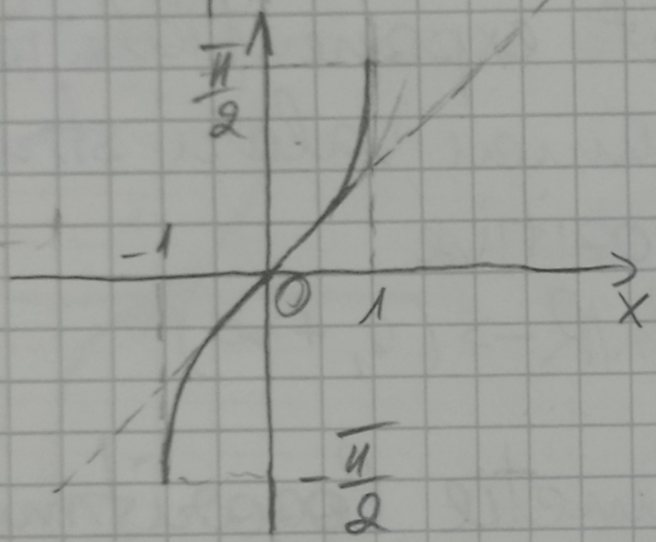
$f(x) = \sin(x)$

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

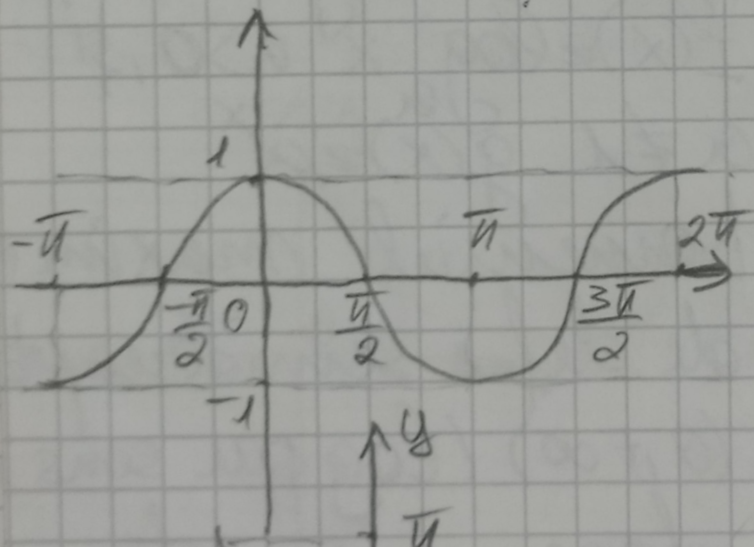
strict crescătoare și bijectivă



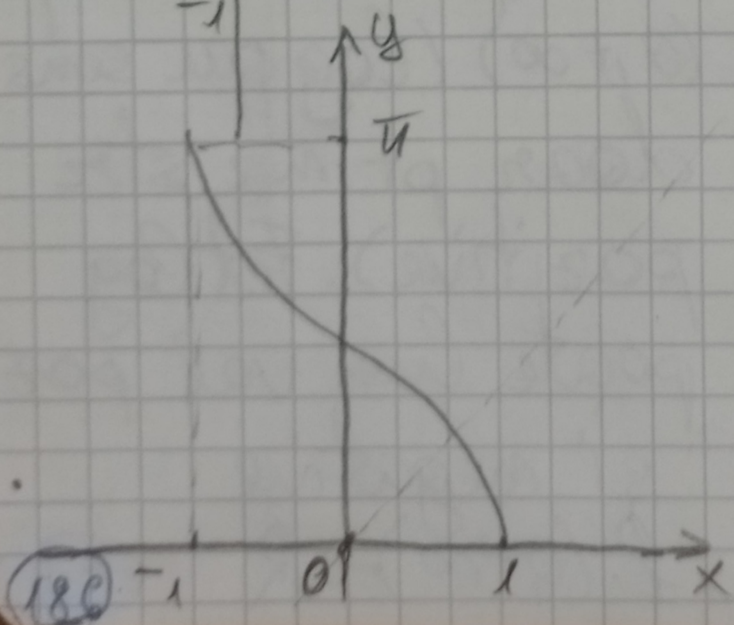
funcția arcsinus

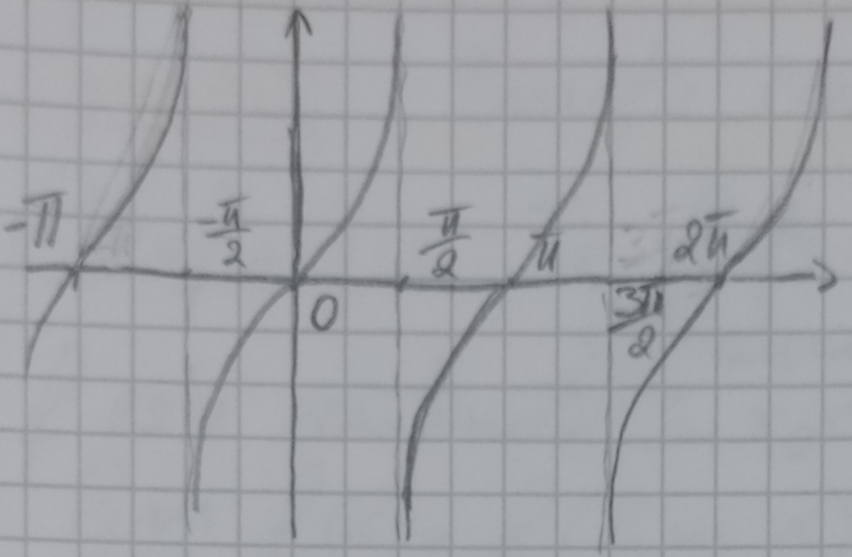


funcția cosinus

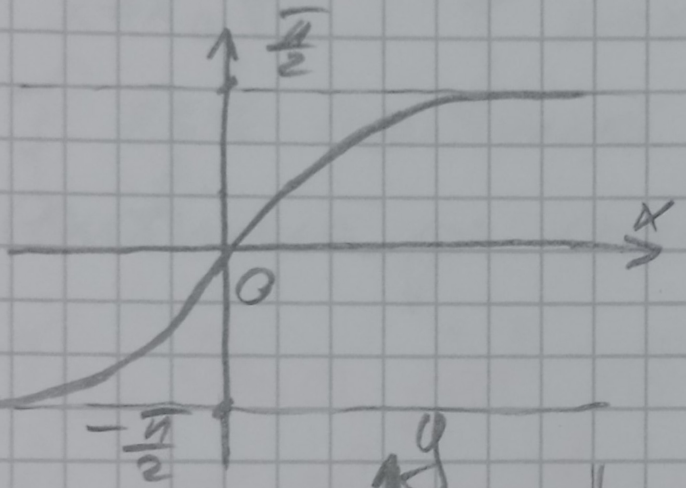


funcția arccos

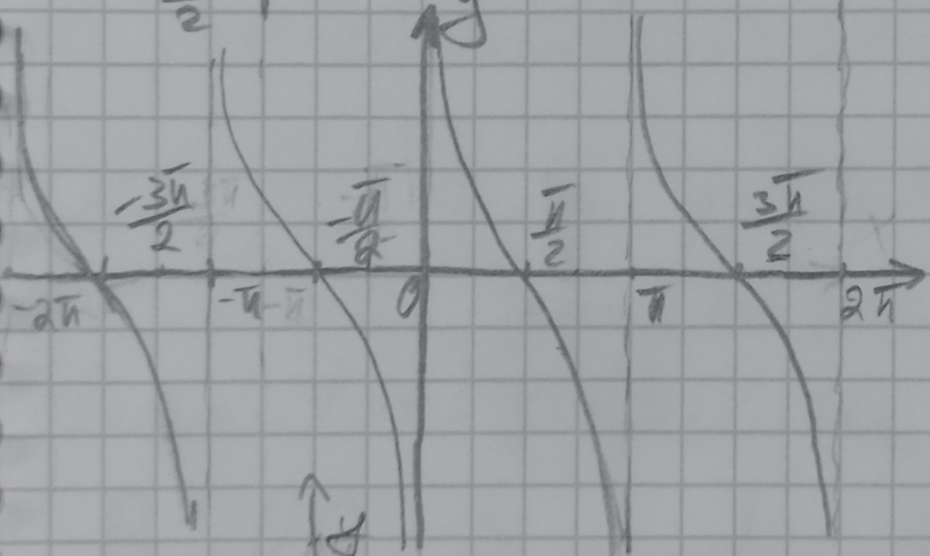




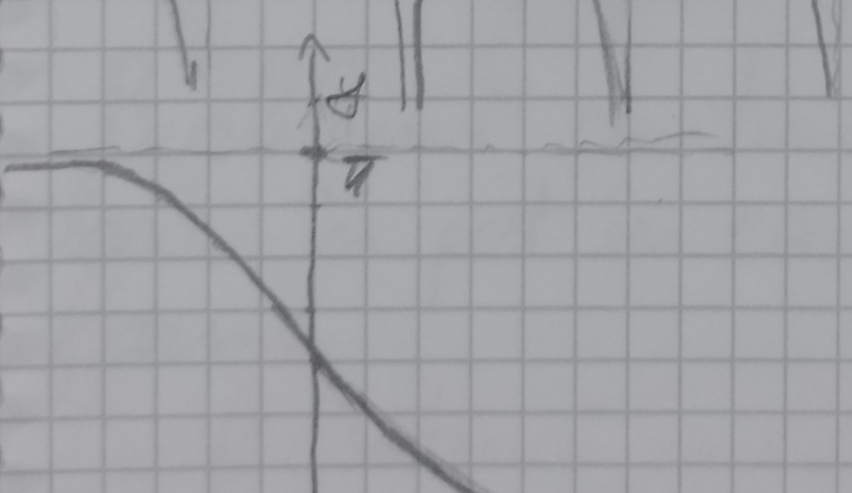
funcția tangentă



funcția arctg



funcția cotangentă



funcția arcctg

Fișa 46: Funcții continue

① **Definiție**: Fie $f: D \to R$, $x_0 \in D$

(D = reuniune de intervale din R)

f este continuă în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = f(x_0)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$

f este continuă pe D dacă f e continuă pe orice punct din D

Th: Orice fct elementară (compunere de fct elementare) este continuă

! Obs: Funcțiile modul, parte întreagă, parte fracționară **NU** sunt elementare și trebuie explicitate

Problema continuității se pune doar în pct în care f își schimbă forma

Th: f continuă în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > 0}} f(x) = f(x_0)$

Obs: f nu e continuă în x_0 dacă nu are loc egalitatea

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

x_0 = pct de discontinuitate

Dacă limitele laterale sunt finite, dacă nu are loc egalitatea atunci x_0 se numește punct de discontinuitate de speța I

Dacă limitele laterale sunt infinite atunci x_0 e punct de discontinuitate de speța II

② Proprietăți ale fct continue

Fie $f: \Delta \to \mathbb{R}$. Spunem că f are prop lui Darboux (prop valorii intermediare) dacă $\forall \lambda$ între $f(a)$ și $f(b)$, $\exists$ c între a și b ai $f(c) = \lambda$

Th: Orice fct continuă are prop lui Darboux

Th lui Bolzano: Dacă f continuă și $f(a), f(b) < 0$, at $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = 0$

(ec $f(x) = 0$) are cel puțin o rădăcină în (a, b)

! Obs: Dacă f cont și $\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to b} f(x) < 0$ atunci $\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = 0$

fișa 47: Funcții derivabile

① **Definiție** $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ fie derivabilă în $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$ $\frac{0}{0}$

f derivabilă pe D dacă f e derivabilă în orice pct din D

Th: Orice fct elementară (comp de fct elementare) e derivabilă

fct $f': D' \to \mathbb{R}$, $D' \subseteq D$ unde $f'(x) =$

D' ↓ mulțimea pe care e derivabil f

$= \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ se numește derivata funcției f

! **Obs.** Dacă $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

atunci spunem că f are derivată în x_0

① **Th:** f derivabilă în $x_0 \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \; \frac{0}{0} =$

$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \; \frac{0}{0} = \ell \in \mathbb{R}$ ← $f'(x)$

③ Th: Dacă 1) f derivabilă pe $D \setminus \{x_0\}$

2) f cont în x_0

3) $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ at f e derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = l$

! Problema derivabilității se pune doar în pctele în care

a) f își schimbă forma

a) f' nu exista (pt fct ce conțin $\sqrt{\ }$ arcsin, arccos)

c) f' își schimbă formă (pt fct ce conțin arcsin și arccos)

e^x element neutru la derivare $\Leftrightarrow (e^x)' = e^x$

$(e^{-x})' = -e^{-x}$

– coboară doar e^{-x} rămâne la fel

② Formule de derivare

$f(x) = const$	$f'(x) = 0$	—	—
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = u^n$	$f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[n]{u}$	$f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^u$	$f'(x) = e^u \cdot u'$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$	$f(x) = a^u$	$f'(x) = a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$f(x) = \log_a u$	$f'(x) = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$

(195) e^x e element neutru la derivare $\Leftrightarrow (e^x)' = e^x$

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin u$	$f'(x) = \cos u \cdot u'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -\sin u \cdot u'$
$f(x) = tg\, x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$	$f(x) = tg\, u$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$f(x) = ctg\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$f(x) = ctg\, u$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arcsin u$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos u$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$f(x) = arctg\, x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = arctg\, u$	$f'(x) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$f(x) = arcctg\, x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = arcctg\, u$	$f'(x) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

③ Formule de calcul

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$

$(k \cdot f)' = k \cdot f'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$(f(u))' = f'(u) \cdot u'$

$(f')' = f''$ $\quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ ← derivat de n ori

$f^g = e^{g \ln f}$

④ Regulile lui L'Hospital

Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ sau $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$,

f, g derivabile, și $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

$\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ atunci $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

!Obs: pt $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ cu V NU se recomandă L'H

$f'(1) \neq [f(1)]'$ deoarece

!Obs: Pt a det $f'(a)$

- calc $f'(x)$ și apoi înlocuim x cu a (în pct în care nu se pune problema derivabilității)
- folosim def, th_1, th_2 (pt pct în care se pune problema derivabilității)

Problema derivabilității se pune doar în pct în care
- f sau f' își schimbă forma
- f' nu există

Fișa 48: **Derivate de ordin superior**

$f^{(n)}(x) \overset{not}{=}$ derivată de ordin n a lui $f(x)$

① Definiție

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' = [f^{(k)}(x)]^{(n-k)}$$

Th: Dacă $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ atunci

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n! \cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

② Teorema Leibniz-Newton

$$(f \cdot g)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} \cdot g + C_n^1 f^{(n-1)} \cdot g' + \dots + C_n^n f \cdot g^{(n)}$$

③ Ordinul de multiplicitate

Fie ec $f(x)=0$. Spunem că $x=\alpha$ este rădăcina cu ordin de multiplicitate $k \in \mathbb{N}^*$ dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_k = \alpha$.

Dacă $k=1$ at $x=\alpha$ e rădăcină simplă

$k=2$ at ------ rădăcină dublă

$k=3$ at ------ rădăcină triplă

Th: Fie ec $f(x)=0$, $x=\alpha$ e răd. cu ordin de multiplicitate $k\in\mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ \dots \\ f^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(k)}=0 \end{cases}$$

fisa 49 **Aplicații ale derivatelor în studiul funcțiilor**

① Ecuația tg la Gf

Ec tg la Gf în pct A(a, f(a)) este (a = abscisă; de abscisă x = a)

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$ ($f'(a)$ = panta tg, $(x-a)$)

(ec dreptei care trece prin $M(x_M, y_M)$ și are panta m este $y - y_M = m(x - x_M)$)

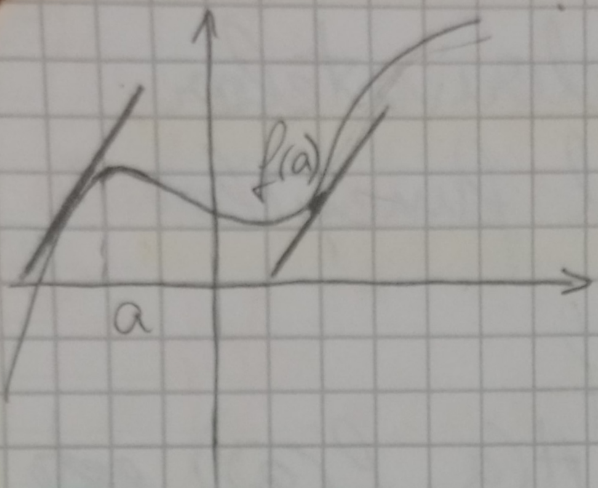
Obs: 1) $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$!!!

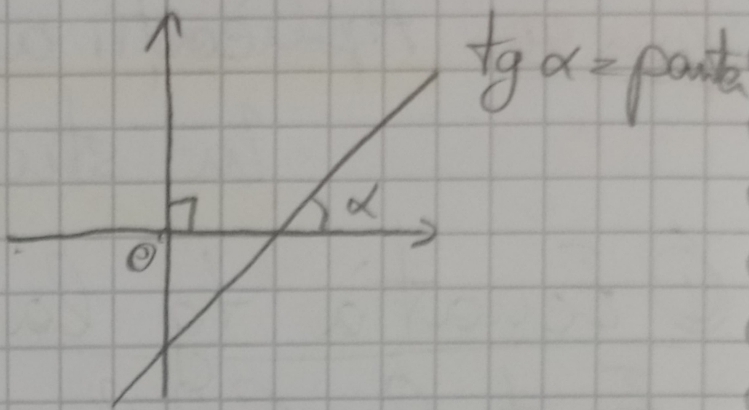
2) $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ (pt d_1, d_2 ∦ cu axele)

3) $m_{Ox} = 0$, m_{Oy} nu există (orice dr ∥ Ox are panta 0, orice dr ∥ Oy nu are pantă)

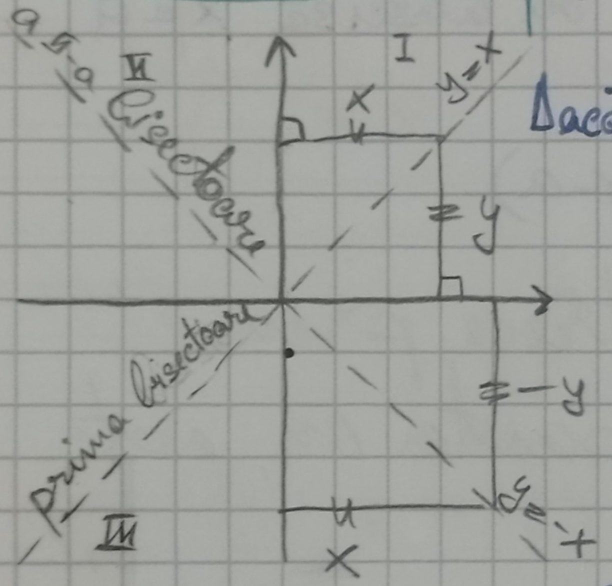
4) Panta dr de ec $y = mx + n$ e m

Panta dr de ec $ax + by + c = 0$ este $-\frac{a}{b}$





② Monotonia funcțiilor:



Dacă $f' > 0$ pe intervalul I at f e monoton str cresc pe I

Dacă $f' < 0$ pe I at f e monoton str cresc pe I

Dacă $f' = 0$ pe I at f e const pe I

Dacă $f'(x_0) = 0$ sau f nu e derivabilă în x_0 și f' își schimbă semnul în jurul lui x_0 at x_0 e punctul de extrem local

min sau max

Obs: 1) Dacă $f' \geq 0$ pe I at f e cresc pe I

2) Dacă f' nu se anulează pe pe un interval at f e str cresc pe I

Def: f e str cresc pe I dacă $\forall x_1 < x_2$ $x_1, x_2 \in I$ avem $f(x_1) < f(x_2)$

str descresc pe I dacă $\forall x_1 < x_2$ cu $x_1, x_2 \in I$ avem $f(x_1) > f(x_2)$

Def $x = x_0$ e pct de min local dacă $\exists$ o vecinătate V a lui x_0 a.i. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in V$

$x = x_0$ e pct de max local dacă $\exists$ o vecinătate V a lui x_0 ai $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in V$

Pct de extrem local nu sunt neapărat pct de extrem global

Th: ① Dacă f cont și str monotonă at f e inj

② f surj $\Leftrightarrow$ Im f = codomeniul

③ Dacă invers și f derivab în x_0 cu $f'(x_0) \neq 0$ at f^{-1} e derivab în $y_0 = f(x_0)$ și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

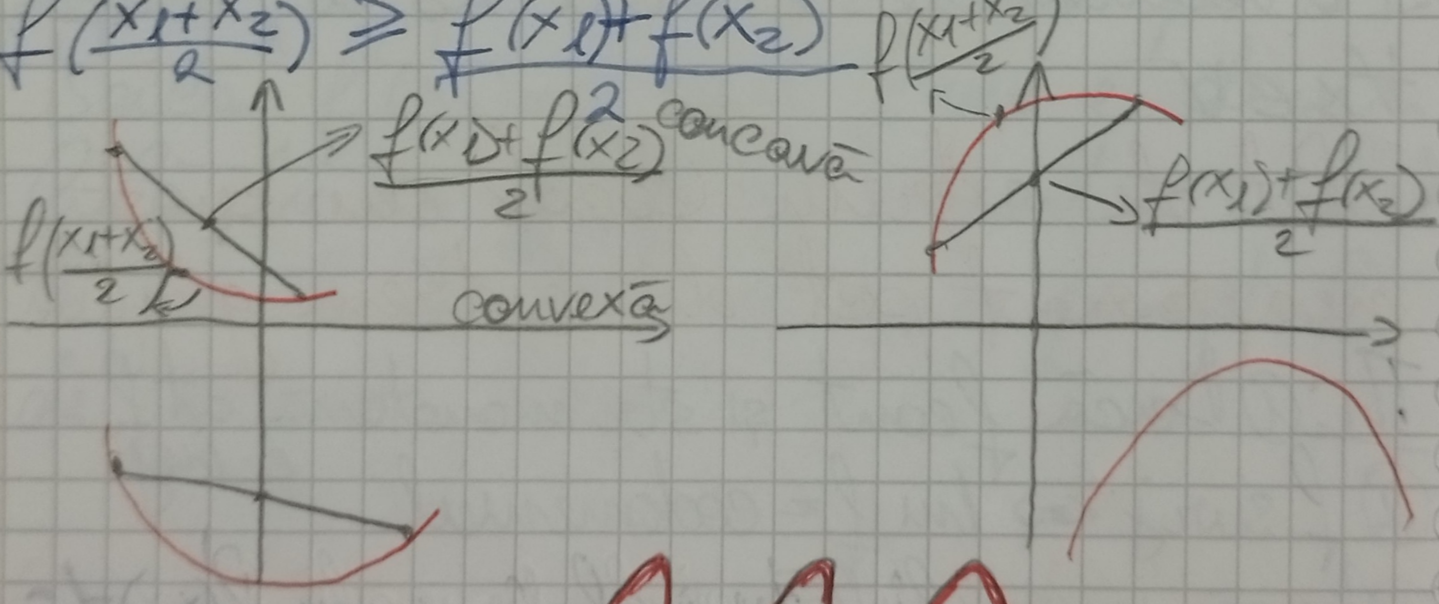
Th: Rolul derivatei a II-a în studiul funcțiilor:

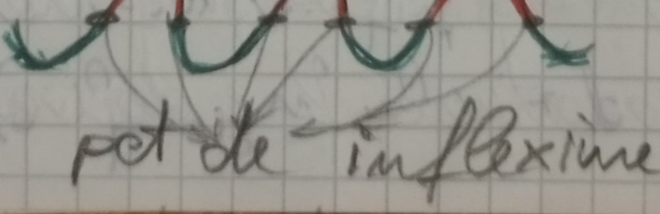
- Dacă $f'' \geq 0$ pe intervalul I at f e convexă pe I
- Dacă $f'' \leq 0$ pe intervalul I at f e concavă pe I
- Dacă $f''(x_0) = 0$ sau f nu e derivab în x_0 și f'' își schimbă semnul în jurul lui x_0 at x_0 se numește <u>pct de inflexiune</u>

Def: f convexă pe I dacă $\forall x_1, x_2 \in I$ au

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$





Fișa 50: **Șirul lui Rolle** clasa a XII-a

① Aflarea numărului de sol ale ec $f(x)=0$

1) se calc lim (valorile) fct în capetele intervalelor de def
2) se calc val de extrem: f(pct extrem)
3) se form șirul lui Rolle alcatuit din semnele val obt la 1) și 2)

Fiecare schimbare de semn ne dă o rădăcină în intervalul corespunzător

!Obs: Dacă $f(x_0)=0$ și $f'(x_0)=0$ at x_0 e răd multiplă (cel puțin dublă) pt ec $f(x)=0$

② Intersecția Gf

1) Intersecția Gf cu axa Ox e dată de sol ec $f(x)=0$
2) Intersecția dintre Gf și Gg e dată de sol ec $f(x)=g(x)$

3) Intersecția dintre G_f și
- dr $y=ax+b$ e dată de sol ec $f(x)=ax+b$
- parabola $y=ax^2+bx+c$ e dată de sol ec $f(x)=ax^2+bx+c$

4) Pt a demonstra că ec $f(x)=0$ are sol unică folosim
a) șirul lui Rolle merge tot timpul
b) Th lui Bolzano + f str monotonă
existența — unicitatea
c) $0 \in \text{Im } f$ + f inj

Obs: f are k pct extrem dacă șirul lui Rolle pt ec $f'(x)=0$ are k schimbări de semn

③ Th lui Fermat

Dacă f derivab în x_0 și x_0 pct extrem cu $x_0 \in$ interiorul dom de def at $f'(x_0)=0$

Obs: 1) Pt a dem o inegalitate folosim monot fct
2) Dacă inegalitatea se dă în ipoteza, at folosim Th Fermat

④ Th lui Rolle

Dacă ① f cont pe $[a, b]$
② f derivab pe (a, b)
③ $f(a) = f(b)$
} ⇒

⇒ $\exists\, c \in (a, b)$ ai $f'(c) = 0$

ec. $f'(x) = 0$ are cel puțin o răd în (a, b)

Obs: Dacă f cont pe $[a, b]$, derivab pe (a, b), și $f(a) = f(b)$ at ∃ un pct $C(c, f(c))$ pe G_f ai tg la G_f să fie ∥ cu Ox

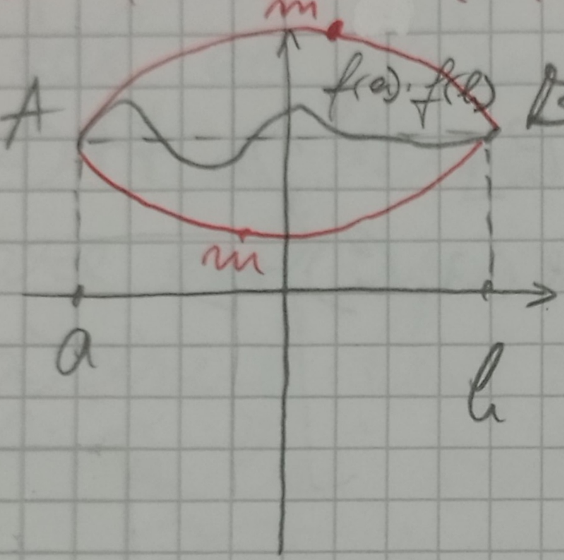
⑤ Th lui Lagrange

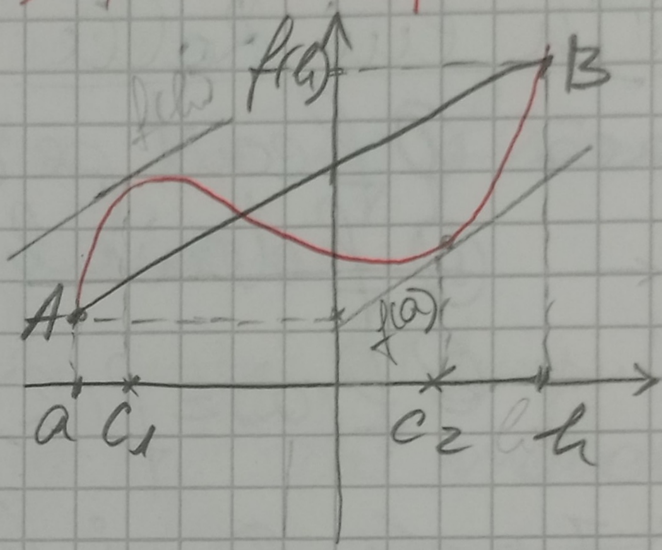
Dacă f cont pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) (f fct Rolle) at $\exists\, c \in (a, b)$ ai

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Rol

!Obs: f cont pe $[a, b]$, derivab pe (a, b) at $\exists\, C(c, f(c))$ pe G_f ai tg la G_f în C să fie $\parallel$ cu segmentul AB, unde $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$





fișa 5: # Primitive

① Definiție:

Fie $F, f: \Delta \to \mathbb{R}$. F e primitivă pt f dacă $\begin{cases} ① F \text{ e derivabilă} \\ ② F' = f \end{cases}$

Obs: 2 primitive ale lui f diferă printr-o constantă

② Notație:

$\int f(x)\,dx$ = mulțimea primitivelor fct f

$\int$ - integrală

Obs: $\int x+1\,dx \neq \int x\,dx + 1$

$f = x^2 + t \Rightarrow \int (x^2+t)\,dx = \frac{x^3}{3} + tx$ ← t e const

$\int (x^2+t)\,dt = x^2 t + \frac{t^2}{2}$ ← x^2 e const

Obs: Dacă F e primitivă pt f atunci

- $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ← constantă
- $\int f'(x)\,dx = f(x)\,C$
- $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$

③ Th: Orice fct continuă admite primitive

Obs: O fct care admite primitive are prop lui Darboux

O fct fără prop lui Darboux nu admite primitive.

④ Proprietăți:

1) $\int f \pm g\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

2) $\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Obs: dacă $f'(x) = g'(x)$ at $f(x) = g(x) + c$

a (fct const)	$ax + c$	$\mathbb{R}$	$\int a\,dx = ax + C$
x^a, $a \neq -1$ (fct putere cu expo $\in \mathbb{R}$)	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$(0, \infty)$	$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$(0, \infty)$ sau $(-\infty, 0)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$ (fct exponențială)	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\mathbb{R}$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{1}{x^2 - a^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$(-\infty, a)$ $(-a, a)$ (a, ∞)	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$, $a \neq 0$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $a \neq 0$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$	$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, $a \neq 0$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\rvert + c$	$(-\infty, -a)$ (a, ∞)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
Funcția g	Primitiva G	Interval	Integrala nedefinită

$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\, x + c$	$((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2})$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\, x + c$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
$tg\, x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2})$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int tg\, x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$ctg\, x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$	$(k\pi, (k+1)\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$	$\int ctg\, x \, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a \neq 0$	$\arcsin \frac{x}{a} + c$	$(-a, a)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\frac{1}{x \pm a}$	$\ln\lvert x \pm a\rvert + c$		$\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln\lvert x \pm a\rvert + c$
$\int \frac{1}{ax+b} dx$	$\frac{1}{a} \ln\lvert ax+b\rvert + c$		

Fişa 52: Integrarea prin părţi

① Th: f, g derivabile atunci

$$\int f'(x)\cdot g(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)dx$$

Obs: În general f' este e^x, $\sin x$, $\cos x$
$\Rightarrow f$ este e^x, $-\cos x$, $\sin x$

În general f' este e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$
$\Rightarrow f$ este $\frac{1}{a}e^{ax}$, $-\frac{1}{a}\cos ax$, $\frac{1}{a}\sin ax$ $a\in\mathbb{R}$

În general g este ln..., arctg..., arcsin...

Ex: $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=x+1+x\ln x$

$$\int_1^e (f(x)-x-1)dx = \int_1^e (x+1+x\ln x-x-1)dx = \int_1^e x\ln x\,dx$$

$f' = x \Rightarrow f = \frac{x^2}{2}$
$g = \ln x \Rightarrow g' = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \ln x\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \ln x\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e =$$

$$= \ln e\cdot\frac{e^2}{2} - \ln 1\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g(x)'dx =$$

Fișa 53 Metoda substituției
(Prima schimbare de variație)

① Definiție: Fie f cont, g derivabilă și F primitivă pt f. Atunci

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

② Notații

$g(x) = t$

$g'(x)dx = 1dt$ $\Rightarrow \int f(t)dt = F(t) + C$

am derivat în fct de x — am derivat în fct de t

Obs ① Pt metoda substituției trebuie obs o fct și derivata ei (înmulțită cu dx)

② În general substituim expresia care ne deranjează

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$, $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

$x^2+1 = t$ $\quad$ $x=1 \Rightarrow t=2$

$2xdx = dt$ $\quad$ $x=0 \Rightarrow t=1$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int_1^2 t^{-2}dt =$

$= \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{t}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{-1}{1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

2.14

Fișa 54: Integrarea fct raționale

① Definiție: Fie $\frac{f(x)}{g(x)}$ unde f și g polinoame $(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)$, funcție rațională

② Th: Orice fracție rațională se poate descompune în sumă de fracții raționale simple.

Ex fcții raț simple: $\frac{1}{(ax+b)^n}$, $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$, $\frac{mx+p}{(ax^2+bx+c)^n}$

• Dacă grad f < grad g at g se descompune în prod de polinoame de grad I și II (cu $\Delta < 0$)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(a_1x+b_1)^n(a_2x+b_2)^m(a_3x^2+b_3x+c)^p} =$$

$$= \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(a_1x+b_1)^n} + \frac{B_1}{a_2x+b_2} + \dots + \frac{B_m}{(a_2x+b_2)^m}$$

$$+ \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{a_3x^2+b_3x+c} + \frac{\alpha_2 + \beta_2}{(a_3x^2+b_3x+c)^2} + \dots + \frac{\alpha_p x + \beta_p}{(a_3x^2+b_3x+c)^p}$$

• Dacă grad $f \geq$ grad g at împărțim pe f la g: $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$

grad $r(x) <$ grad $g(x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \cdot q(x) + r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

caz I ←

Obs: singura dată când folosim integrarea prin părți e la fracții raționale

fișa 55: A 2a schimbare de variabilă

① Def: Fie g inversabilă & derivabilă și H primitivă pt $f(g(x))\cdot g'(x)$. At f admite primitive și $\int f(x)dx = H(g^{-1}(x))+C$

② Def: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dacă pt orice diviziune $\Delta=\{x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b\}$ cu $\|\Delta\|\to 0$ și pt orice sist de pct intermediare $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n\}$ asociat diviziunii Δ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=l\in\mathbb{R}$ at spunem că f e integrabilă Riemann și $l\overset{not}{=}\int_a^b f(x)dx$

③ Th Leibniz-Newton:

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)\overset{not}{=}F(x)\Big|_b^a$ unde F e o primitivă pt f

$G(x)=F(x)+C$

$G(b)=F(b)+C$
$G(a)=F(a)+C$ $\Rightarrow G(b)-G(a)=F(b)-F(a)$

$\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{0}{2}=\frac{1}{2}$

Obs: Orice fct continuă e integrabilă

$\int_a^b f(x)dx$ - integrală definită

Fișa 56 **Legi de compoziție**

① Def: Fie M o mulțime. Orice fct $f: M\times M \to M$ se numește lege de compoziție

$M\times M = \{(m_i, m_j) \mid m_i, m_j \in M\}$

$f(m_i, m_j) = m_K$ $\quad f((m_i, m_j)) \overset{not}{=} m_i \underset{\circ \atop \square}{*} m_j$

② Stabile: Fie $*$ o lege de comp pe M și P o submulțime a lui M.
Spunem că P e parte stabilă a lui M în rap cu lg „$*$" dacă $\forall x, y \in P$
$\Rightarrow x*y \in P$

③ Proprietăți: Fie M o mulțime și „$*$" lg de comp pe M

1) Dacă $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x, y, z \in M$ spunem că „$*$" e asociativă

2) Dacă $x*y = y*x$ $\forall x, y \in M$ at spunem că „$*$" e comutativă

3) Dacă $\exists e \in M$ ai $x*e = e*x = x$ $\forall x \in M$ at spunem că „$*$" admite elem neutru e

4) Fie $x \in M$. Dacă $\exists\, x' \in M$ ai $x * x' = x' * x = e$ at x = simetrizabil și x' e simetricul lui x

Obs: 1) În rap cu „+" simetric = opus și în rap cu „·" simetric = invers

2) $\forall x \in M, \exists e \in M$ ai $x * e = e * x = x$

④ Pași rezolvare comune (?)

① Aflarea elem neutru

1. se dem $x * e = e * x$ (comutativitatea)

2. se dem $x * e = x$

② Aflarea simetricului

1. se dem $x * x' = x' * x$ (comutativitatea)

2. Se află elem neutru

3. Se dem $x * x' = e$

Obs: 1) Dacă $x * y = \alpha(x-a)(y-a) + a$ at $x * a = a * x = a \; \forall x$

2) Dacă pt aflarea elem neutru abt $(e-t)(x-a) = 0$ at $e = t$

$x * a = a * x = a \; \forall x$

3) Pt a def $x_1 * x_2 * \dots * x_n$ folosim

a) elem „a" de la 1) (pt expr numerice

b) inducție

c) o eventuală fct date

Fișa 57: Monoid. Grup

① Monoid: Fie M o mulțime, "*" lg de comp pe M. Dacă:

① * asociativ
② * admite elem neutru

} => spunem că * def pe M o struc algebrică de monoid.

not (M, *) - monoid

Dacă "*" e și comutativă => M monoid comutativ

② Grup: Fie G o mulțime, "*" lg de comp pe G. Dacă:

① "*" asociativ
② "*" admite elem neutru
③ orice elem ∈ G e simetrizabil

} => "*" def pe G o struc algebrică de grup

not (G, *) - grup

Dacă "*" e și comutativă => G grup comutativ (abelian)

Obs: Fie E o mulțime, "*" lg de comp pe E, și G ⊂ E. Pt a demo (G, *) grup trebuie demo și parte stabilă

③ Reguli de calcul în grup

(G, *) grup

$x * y = x * z \Rightarrow y = z$

$x * y = z * y \Rightarrow x = z$

$x^{n} = \underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori}}$

$(x^{n})^{m} = x^{n \cdot m}$

$x^{-n} = (x')^{n}$

④ Lege de compoziție internă tabel! (aka orice elem ∈ G e simetrizabil)

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -A$ $A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -A^2$

$A^5 = A \quad A^6 = A^2 \quad A^7 = A^3 \quad A^8 = A^4$

$G = \{A, A^2, A^3, A^4\}$ grup în rap cu $\cdot$

$(G, \cdot)$ grup

$\cdot$	A	A^2	A^3	A^4
A	A^2	A^3	A^4	A
A^2	A^3	A^4	A	A^2
A^3	A^4	A	A^2	A^3
A^4	A	A^2	A^3	A^4

tabel elem neutru

$A^4 = E$ (elem neutru)

$B \cdot E = E \cdot B \Rightarrow \begin{cases} A \cdot A^4 = A \\ A^2 \cdot A^4 = A^2 \\ A^3 \cdot A^4 = A^3 \\ A^4 \cdot A^4 = A^4 \end{cases}$

lg de comp internă

Fișa 53: Clase de resturi în modulo n

Def: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. La împărțirea unui nr întreg la n obținem resturile $0, 1, \ldots, n-1$

$\hat{x}$ - mulțimea nr întregi care dau restul x la împărțirea la n cu $0 \leq x \leq n$

$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ mulțimea claselor de resturi în modulo n

Pe $\mathbb{Z}_n$ definim "+" $\hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b}$

"·" $\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b}$

Th: $(\mathbb{Z}_n, +)$ e un grup comutativ

① "+" asociativă $(\hat{a} + \hat{b}) + \hat{c} = \widehat{a+b} + \hat{c} = \widehat{a+b+c}$

$\hat{a} + (\hat{b} + \hat{c}) = \hat{a} + \widehat{b+c} = \widehat{a+b+c}$

② "+" comutativă

③ $\hat{0}$ e elem neutru

④ Orice elem din $\mathbb{Z}_n$ are un opus

$-\hat{a} = \widehat{-a+n}$

II $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoid comutativ

① "·" asociativă

② "·" comutativă

③ "$\hat{1}$" element neutru

Obs: Elementele inversabile (simetrizabile în raport „·") din $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ sunt doar elementele prime cu n Ex: În $\mathbb{Z}_8$ elem inv sunt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$

⇓

⑧ Th: $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ grup ⇔ n nr prim

Fișa 59: Morfism de grupuri

Def: Fie $(G_1, *)$, $(G_2, \cdot)$ 2 grupuri și $f: G_1 \to G_2$

Se numește morfism de grupuri dacă $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$

Dacă în plus f e bij, f se numește izomorfism. ~~Gr~~ $(G_1, *)$ $(G_2, \cdot)$ sunt izomorfe

not $(G_1, *) \simeq (G_2, \cdot)$

Obs: f morfism at ① $f(e_1) = e_2$

② $f(x') = [f(x)]'$

fișa 6a

Subgrup

① **Def:** Fie $(G, *)$ grup și $H \subset G$ o submulțime a lui G
Dacă $(H, *)$ grup at $(H, *)$ se numește subgrup pt $(G, *)$
Not $(H, *) \trianglelefteq (G, *)$ ← subgrup

② **Proprietăți:** $(H, *)$ subgrup
1) Parte stabilă
2) Asociativ
3) ∃ elem neutru (sub elem lui G)
4) Orice elem din H are simetric TOT în H

③ **Th:** 1) $(H, *)$ subgrup $\Leftrightarrow$
① $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$
② $\forall x, y \in H \Rightarrow x' \in H$
2) $(H, *)$ subgrup $\Leftrightarrow \forall x, y \in H \Rightarrow x * y' \in H$

Obs: ① Subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$ sunt de forma $(n\mathbb{Z}, +)$

$n\mathbb{Z} = \{...-2n, -n, 0, n, 2n, 3n...\}$
(n · elem $\mathbb{Z}$)

② Subgrupurile finite ale lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ sunt cele formate cu rădăcinile de ordin n ale unității

Fișa 61: # Grupuri finite

① Definiție: Un grup finit de elemente se numește grup finit. Nr de elemente se numește ordinul grupului (not ordG)

Ex: $(\mathbb{Z}_n, +)$ ord $G = n$

$(S_n, \cdot)$ ord. $G = n$

mulțimea permutărilor de ordin n

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ n prim

$G = \{1, -1\}$ $(G, \cdot)$ grup ord $G = 2$

$G = \{1; \varepsilon; \varepsilon^2\}$ $(G, \cdot)$ grup ord $G = 3$

② Grupul lui Klein: $(K, \cdot)$ grup comutativ cu K dom numit grupul lui Klein $K = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

Ex: $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $x^2 = e, \forall x \in K$

$f_1((x, y)) = (x, y)$ $f_3((x, y)) = (-x, -y)$

$f_2((x, y)) = (-x, y)$ $f_4((x, y)) = (x, -y)$

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

③ **Ordinul elementului x:** Fie $(G,*)$ grup. $x\in G$. Cel mai mic nr natural nenul n, pt care $x^n=e$ se numește ordinul elem x, not ord x

Obs: ord $x=1 \Leftrightarrow x=e$

④ **Th:** ord x / ord G $\forall x\in G$

ord H / ord G $\forall H$ subgrup

Obs: Fie $(G,\cdot)$ grup, $x\in G$ cu ord $x=n$

Atunci mulțimea $H=\{x, x^2, x^3 \dots x^n=e\}$ este subgrup pt G

① $\forall x^k, x^l = x^{k+l} \in H$

$k+l \le n \Rightarrow k^{k+l} \in H$

$k+l > n \Rightarrow k+l=n+p \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{k+l} = \underbrace{x^n}_{e} \cdot x^p = x^p \in H, p<n$

② $\forall x^k \in H \Rightarrow x^{n-k}$ simetricul lui x^k se află în H

⑤ Subgrup generat: $H = \{x, x^2, \ldots, x^n = e\}$ se numește subgrup generat de x (notat $\langle x \rangle$)

⑥ Grup ciclic: Dacă $G = \langle x \rangle$ atunci G se numește grup ciclic

Obs: ① Orice grup ciclic este comutativ ($x^k \cdot x^l = x^l \cdot x^k$)

② Orice 2 grupuri ciclice cu același nr de elem sunt izomorfe

$G_1 = \{x, x^2, \ldots, x^n\}$
$G_2 = \{y, y^2, \ldots, y^n\}$
$f: G_1 \to G_2$
$f(x^k) = y^k$ izomorf

③ Orice grup cu nr prim de elemente este ciclic

④ a) Orice 2 grupuri cu două elemente sunt izomorfe (3) (5)

b) Orice grup cu 4 elem e izomorf cu

$(\mathbb{Z}_4, +)$ sau cu $(K, \cdot)$

c) Orice grup cu 2, 3, 4, 5 elem e comutativ

$(S_3, \cdot)$ grup cu $3! = 6$ elem **necomutativ**

② Reguli de calcul într-un grup

$(G, *)$ grup

$x * y = x * z \Rightarrow y = z$

$x * y = z * y \Rightarrow x = z$

$x^n = \underbrace{x * x * x \dots * x}_{n \text{ ori}}$

$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$x^{-n} = (x')^n$

Fișa 62

Inel

① **Definiție:** Fie A o mulțime „*",
„∘" 2 legi de compoziție pe A
Dacă ① $(A, *)$ grup comutativ
② $(A \setminus \{e_*\}, \circ)$ monoid
③ are loc distributivitatea
$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z) \ \forall x, y, z \in A$ } ⇒
⇒ atunci $(A, *, \circ)$ inel

Obs: În general $* \overset{not}{=} +$ $e_* \overset{not}{=} 0$
$\circ \overset{not}{=} \cdot$ $e_\circ \overset{not}{=} 1$

Dacă în plus „∘" este comutativă
at $(A, *, \circ)$ inel comutativ

Obs: Elem inversabile ale inelului sunt elem simetrizabile în raport cu „∘"

② **Divizor:** Fie $x \neq e_*$ cu $x \in (A, *, \circ)$. x se numește divizor al lui 0 dacă
$\exists\, y \neq e_*$ ai $x \circ y = y \circ x = e_*$

Un inel fără divizori ai lui 0 se numește inel integru sau domeniu

de integritate

⑤ Morfism de inele: Fie $(A_1, *, \circ)$, $(A_2, \perp, T)$ 2 inele. $f: A_1 \to A_2$ se numește morfism de inele dacă

$$\begin{cases} ① \ f(x * y) = f(x) \perp f(y) \\ ② \ f(x \circ y) = f(x) \, T \, f(y) \end{cases}$$

Dacă în plus f este bijectivă atunci f e izomorfism

Obs: f izomorfism $\Rightarrow$ $f(e_*) = e_\perp$
$f(e_\circ) = e_T$

Fișa 63:

Corp

① **Definiție:** Fie K o mulțime, „*", „∘" 2 legi de compoziție pe K. Dacă:

① (K, *) grup comutativ
② (K \ {e_*}, ∘) grup
③ are loc distributivitatea
$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)\ \forall x, y, z \in K$

$\Rightarrow$ (K, *, ∘) corp

Obs: ① Într-un corp NU există divizori ai lui zero
② Orice morfism de corpuri e inj

② **Th integrării prin părți**

$$\int_a^b f' g\, dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f \cdot g'\, dx$$

③ **Th (metoda substituției):**

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

$g(x) = t$ → $x = a \Rightarrow t = g(a)$
$g'(x)\, dx = dt$ → $x = b \Rightarrow t = g(b)$

Fișa 64: Proprietăți ale integralei definite

① $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \dots$

② $\int_a^b (f \pm g)dx = \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx$

③ $\int_a^b \alpha f dx = \alpha \int_a^b f dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

④ $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \forall b \in (a, c)$

Obs: ① Orice fct continuă e integrabilă

② Dacă f integrabilă pe $[a, b] \setminus \{$un nr finit de pct$\}$ și f mărginită pe $[a, b]$ at f e integrabilă pe $[a, b]$

⑤ Dacă f continuă pe $[a, b]$ $\xrightarrow[\text{Weierstrass}]{\text{th lui}}$ $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ ai $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, $a < b$

At $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

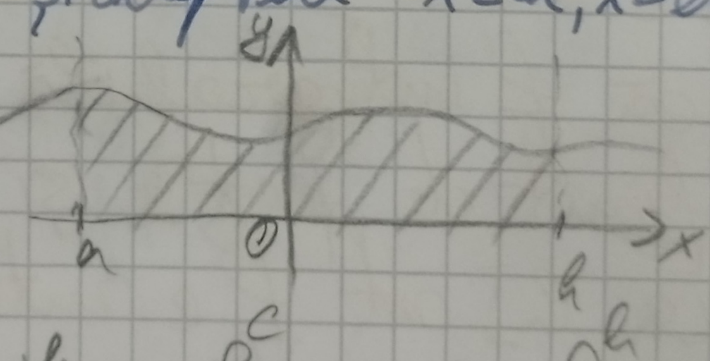
⑥ Dacă f, g continue pe $[a, b]$ și $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ at $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

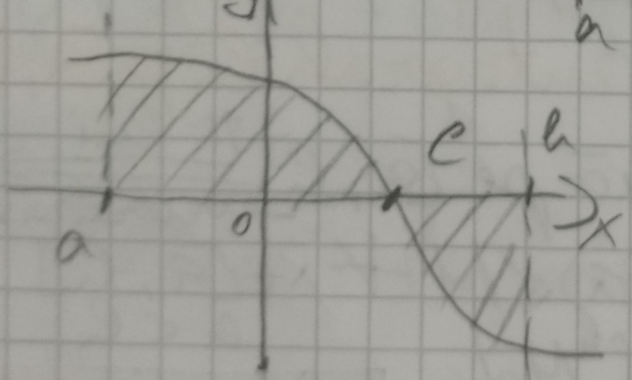
⑦ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ dacă } f \text{ impară } (f(-x) = -f(x)) \\ 2\int_0^a f(x)d \text{ dacă } f \text{ pară } (f(-x) = f(x)) \\ \text{calculăm dacă } f \text{ nu e nici pară nici impară} \end{cases}$

⑧ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ – folosită la trig

și – folosit când nu mai ai idei

⑨ <u>Th:</u> Aria suprafeței cuprinse între G_f, axa Ox, și dreptele $x=a$, $x=b$ este $\int_a^b |f(x)|dx$





$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx$

(10) Th: Aria supraf cuprinse între G_f, G_g și dreptele $x=a$, $x=b$ este

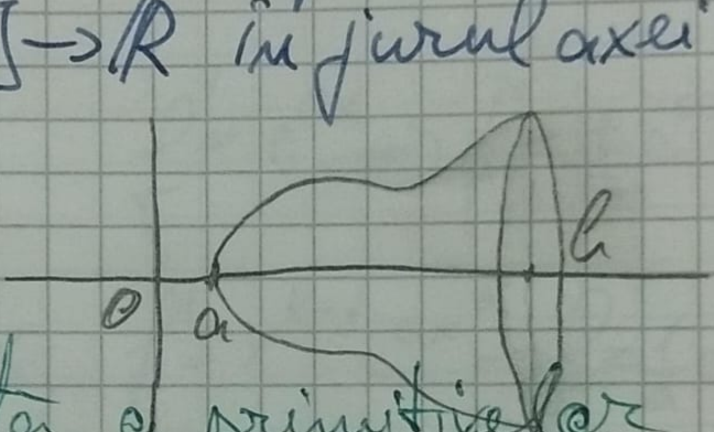
$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Obs: Aria supraf cuprinsă între G_f axele de coord și dreapta $x=b$ este (Ox, și dr $x=0$)

$$\int_0^b |f(x)|\,dx$$

(11) Volumul corpului obț prin rotirea G_f, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ în jurul axei Ox este

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$



(12) Th de existența a primitivelor

Fie f cont: At $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ e o primitivă a lui f cu prop că $F(a)=0$

$-\int_x^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=f(x) \Rightarrow \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$$

derivat în funcție de x

Fișa 65: Șiruri recurente pt 2

① Recurențe ce NU se obțin integrând prin părți

pt 1 pag 167

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0}\,dx$$

$$a_k I_{n+k} + a_{k-1} I_{n+k-1} + \ldots + a_0 I_n = \frac{1}{n+1}$$

② Recurențe ce se obțin integrând prin părți:

1) $I_n = \int_0^1 x^n e^{ax}\,dx$ $\quad f' = e^{ax} \Rightarrow f = \frac{1}{a} e^{ax}$

1') $I_n = \int_0^1 x^n e^{ax^k}\,dx$ $\quad f' = x^{k-1} e^{ax^k} \Rightarrow f = \frac{1}{a} e^{ax^k}$

2) $I_n = \int_0^1 x^n \sin x\,dx$ (cos) $\quad f' = \sin x \Rightarrow f = -\cos x$

(de 2 ori prin părți)

3) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ $(\cos^n x)$ $\quad f' = \sin x \Rightarrow f = -\cos x$

(folosim $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$g = \sin^{n-1} x \Rightarrow g' = (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x$

4) $I_n = \int_1^e x^k \ln^n x \, dx \quad f' = x^k \Rightarrow f = \frac{x^{k+1}}{k+1}$

5) $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x \pm a}} dx \quad f' = \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} \Rightarrow f = 2\sqrt{x \pm a}$

6) $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx \quad f' = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}} \Rightarrow f = \sqrt{x^2 \pm a}$.

Obs: 1) Apoi se amplifică cu $\sqrt{}$

2) $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{a-x}} dx \quad f' = \frac{1}{\sqrt{a-x}} \Rightarrow$

$f = -2\sqrt{a-x}$

7) $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x \pm a} \, dx \quad f' = \sqrt{x \pm a} \Rightarrow$

$f = \frac{2(x \pm a)\sqrt{x \pm a}}{3}$

8) $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 \pm a} \, dx \quad f' = x\sqrt{x^2 \pm a} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = \frac{(x^2 \pm a)\sqrt{x^2 \pm a}}{3}$

9) $I_n = \int_a^b (p + q \cdot x^r)^n dx \quad f' = 1 \Rightarrow f = x$

10) $I_n = \int_a^b [(x-a)(x-b)]^n dx \quad f' = 1 \Rightarrow f = x - \frac{a+b}{2}$

$(a-x)\ (b-x)$

$x^2 - (a+b)x + ab$

243

③ Convergență. Divergență

1) Orice șir de nr reale care are limita finită se numește **convergent**

dacă $l \in \mathbb{R}$ și $\lim_{n \to \infty} x_n = l$ atunci șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent către l

2) Șirurile care nu au limită sau au limită $\pm\infty$ se numesc **divergente**

! Se dem arătând că șirul e monoton și mărginit

Fișa 66: Polinoame

① **Def**: Fie $(A, +, \cdot)$ un inel

$f = a_n \cdot x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad a_i \in A$

se numește polinom de grad $n \in \mathbb{N}$, în (cea mai mare putere a lui x) nedeterminata x cu coef în A.

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ se numește fct polinomială atașată (asociată) polinomului f

② **Proprietăți**

$A[x]$ - mulțimea polinoamelor cu coeficient în A

! Obs: $(A[x], +, \cdot)$ inel

$g = b_m x^m + \ldots + b_0$

$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ a_i = b_i \ \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$

$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \ldots + (a_n + b_n) x^n$

$f \cdot g = a_0 \cdot b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \ldots$

$f - g = f +$ opusul lui g

① Th împărțirii cu rest:

Fie $f, g \in A[x]$. Dacă l_g inversabil în $(A, +, \cdot)$ at $\exists$ și sunt unice polinoamele q și $r \in A[x]$ ai $f = g \cdot q + r$ unde grad r < grad g ($R < \hat{I}$) ($D = \hat{I} \cdot C + R$)

② Th restului: Restul împărțirii lui f la $x - a$ este $f(a)$

Fișa 67: Divizibilitate

① **Def:** $f, g \in A[X]$. Spunem că g divide f (g / f) sau f divizibil (se divide) cu g ($f \vdots g$) dacă $\exists$ $h \in A[X]$ ai $f = g \cdot h$

② **Th**

1) $g / f \Leftrightarrow$ restul împărțirii lui f la $g = 0$

2) Th lui Bezout $X - a / f \Leftrightarrow f(a) = 0$

3) $g / f \Leftrightarrow$ rădăcinile lui g sunt rădăcini și pentru f cu același ordin de multiplicitate.

③ Rădăcini pentru polinom:

1) $\alpha \in A$ se numește rădăcină pt polinomul f dacă $f(\alpha) = 0$

2) $\alpha \in A$ se numește rădăcina cu ordin de multiplicitate $K \in \mathbb{N}^*$ dacă $(X-\alpha)^K / f$

Th:

1) α răd cu ordinul de multiplicitate k pentru $f \iff$

$$\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ f^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

pt $k=2 \Rightarrow \alpha$ răd dublă $(x_1=x_2=\alpha) \iff$

$$\iff \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \\ f''(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

pt $k=3 \Rightarrow \alpha$ răd triplă $\iff$ $(x_1=x_2=x_3=\alpha)$

$$\iff \begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)=0 \end{cases} \quad f''(\alpha)=0 \quad f'''(\alpha)\neq 0$$

2) Dacă $f\in\mathbb{Q}[X]$ și $x_1=a+b\sqrt{c}$, $a,b\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{c}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ atunci $x_2=a-b\sqrt{c}$

3) Dacă $f\in\mathbb{R}[X]$ și $x_1=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ atunci $x_2=a-bi$

4) Dacă $f \in \mathbb{Q}[x]$ și $x_1 = a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$ atunci

$$\begin{cases} x_2 = a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \\ x_3 = -a\sqrt{b} + c\sqrt{d} \\ x_4 = -a\sqrt{b} - c\sqrt{d} \end{cases}$$

5) Dacă $f \in \mathbb{Q}[x]$ și $x_1 = a\sqrt{b} + ci$ atunci

$$\begin{cases} x_2 = a\sqrt{b} - ci \\ x_3 = -a\sqrt{b} + ci \\ x_4 = -a\sqrt{b} - ci \end{cases}$$

⑤ Rădăcina polinoamelor

Th: 1) Dacă $f \in \mathbb{Z}[x]$ și x_0 răd întreagă a lui f atunci x_0 / a_0

2) Dacă $f \in \mathbb{Z}[x]$ și $\frac{p}{q}$ rădăcină a lui f at $\begin{cases} p / a_0 \\ q / a_n \end{cases}$

Fișa 68: Ecuații reciproce

① Def: Ec în care coef egali depărtați de capete sunt =

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

② Th: O ec reciprocă de grad impar are sol $x_1 = 1$

! Obs: 1) Pt o ec reciprocă de grad par se împarte prin x^k și se face substituția $x + \frac{1}{x} = t$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$

2) $\left.\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} \geq 2 \ \forall x > 0 \\ x + \frac{1}{x} \leq -2 \ \forall x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \frac{1}{x} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \ \forall x \in \mathbb{R}^*$

fișa 63: Relațiile lui Viette

① Definiție:

$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $(=0)$

cu rădăcinile $x_1, x_2 \dots x_n$

atunci

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} = S_1$

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} = S_2$

$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} = S_n$

② Gradele cele mai des folosite:

1) $f = ax^2 + bx + c$ de grad 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = S_1 \ (S) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = S_2 \ (P) \end{cases}$$

relațiile lui viette vechi

2) $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de grad 3

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a} \\ S_3 = x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

3) $f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ec grad 4

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \\ S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} \end{cases}$$

se generează ca permutările în backtracking de la info

③ Proprietăți

① S_k = suma produselor de câte k rădăcini

S_k are C_n^k termeni în sumă

② **NU** putem rezolva o ecuație DOAR din relațiile lui Viette

③ a) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 =$

$= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) =$

$= S_1^2 - 2S_2$

!!! Dacă $x_1, x_2 \dots x_n \in \mathbb{R}$ atunci

$S_1^2 - 2S_2 \geq 0$

$S_1^2 - 2S_2 < 0$ atunci $\exists$ și răd complexe

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}=\frac{s_{n-1}}{s_n}$

4) $S_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$, $k\in\mathbb{N}^*$ se numesc <u>sumele lui Newton</u>

$S_1=s_1$, $S_2=s_1^2-2s_2$

$a_nS_n+a_{n-1}S_{n-1}+\dots+a_1S_1+a_0=0$

Pentru a determina S_k, $k\geq 3$, înlocuim rădăcinile în ecuație

5) O ec de grad n cu soluțiile $x_1, x_2, \dots, x_n$ este

$x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}-s_3x^{n-3}+\dots+(-1)^ns_n=0$

Ex: o ec cu sol $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ este $x^3-6x^2+11x-6=0$

6) Dacă $a_nx^n+\dots+a_0$ cu răd $x_1, x_2 \dots x_n$ atunci $f=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$

Ex: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Fișa 20.

Derivate

(1) $c' = 0$ (c = constanta)

	u = expresie
(2) $x' = 1$	
(3) $(x^{n.})' = n x^{n-1}$	$(u^n)' = n u^{n-1} \cdot u'$
(4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
(5) $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sqrt[3]{u})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'$
(6) $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{u})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$
(7) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
(8) $(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
(9) $(a^x)' = a^x \ln a$ a = nr	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
(10) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$
(12) $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{x^2+1}$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{u^2+1} \cdot u'$
(13) $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{u^2+1} \cdot u'$
(14) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
(15) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot u'$

16	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
17	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
18	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
19	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
20	$(\sqrt{x^2-a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$(\sqrt{u^2-a^2})' = \frac{u}{\sqrt{u^2-a^2}} \cdot u'$
21	$(\sqrt{x^2+a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$(\sqrt{u^2+a^2})' = \frac{u}{\sqrt{u^2+a^2}} \cdot u'$
22	$(\sqrt{a^2-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$(\sqrt{a^2-u^2})' = -\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} \cdot u'$

Fișa 71: Integrale nedefinite

$\int x\,dx$	$x + C$
(1) $\int a\,dx$ (a const)	$ax + C$
(2) $\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
(3) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
(4) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$	$-\frac{1}{x} + C$
(5) $\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$
(6) $\int e^x\,dx$	$e^x + C$
(7) $\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
(8) $\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$
(9) $\int \sin x\,dx$	$\cos x + C$
(10) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\operatorname{tg} x + C$
(11) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
(12) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
(13) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$	$\arcsin\frac{x}{a} + C$
(14) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx$	$\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
(15) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx$	$-\sqrt{a^2 - x^2} + C$

16	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
17	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$
18	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$
19	$\int tg\,x\,dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
20	$\int ctg\,x\,dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
21	$\int \frac{1}{ax+b}\,dx$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
22	$\int \frac{x}{x^2\pm a^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\ln\lvert x^2\pm a^2\rvert + C$
23	$\int \frac{1}{x\pm a}$	$\ln\lvert x\pm a\rvert + C$
24	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
25	$\int \ln x\,dx$	$x\ln x - x + C$
26	$\int e^{-x}\,dx$	$-e^{-x}\,dx$
27	$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
28	$\int f'(x)\,dx$	$f(x) + C$
29	$\int f(x)\,f'(x)\,dx$	$\frac{f^2(x)}{2} + C$
30	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\ln\lvert f(x)\rvert + C$

(31) $\int f^{n}(x) f'(x)\,dx$	$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$
(32) $\int (1+tg^2 x)\,dx$	$tg\,x + C$
(33) $\int (1+ctg^2 x)\,dx$	$-ctg\,x + C$
(34) $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$	$arctg\,x + C$
(35) $\int -\frac{1}{x^2+1}\,dx$	$arcctg\,x + C$
(36) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$arcsin\,x + C$
(37) $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$arccos\,x + C$
(38) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert$
(39) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{x}{a} + C$
(40) $\int f(x)\,dx$	$F(x) + C$
(41) $\int f(x) F(x)\,dx$	$\frac{F^2(x)}{2} + C$
(42) $\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx$	$\ln\lvert F(x)\rvert + C$
(43) $\int f(x) g'(x)\,dx$	$f(x)g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$

formulă

Tabel trigonometric

x	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0
ctg	/	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	/	0	/

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
arcsin	$\frac{3\pi}{2}$	$0/\pi/2\pi$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	/	/	$\frac{\pi}{2}$
arccos	π	$\frac{\pi}{2}/\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	/	/	$0/2\pi$
arctg	/	$0/\pi/2\pi$	/	/	/	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
arcctg	*/	$\frac{\pi}{2}/\frac{3\pi}{2}$	/	/	/	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$

$arctg\ 0 = 0$

$arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$

Cuprins

I Clasa a IX-a:

fișa 1: Formule de calcul prescurtat 1
fișa 2: Ecuația de gradul I 3
fișa 3: Progresii 7
fișa 4: Funcții de gradul I 11
fișa 5: Funcții. Lecturi Grafice 17
fișa 6: Modulul unui număr real 23
fișa 7: Parte întreagă. Parte fracționară 27
fișa 8: Trigonometrie 29
fișa 9: Funcția de gradul II 34
fișa 10: Linii importante în triunghi 42
fișa 11: Patrulatere remarcabile 44
fișa 12: Vectori 47
fișa 13: Formule trigonometrice 53
fișa 14: Aplicații ale trigonometriei în geometrie .. 59
fișa 15: Geometrie 63

II Clasa a X-a:

fișa 16: Funcții injective, surjective, bijective 63
fișa 17: Funcții particulare. Domeniu de definiție. Proprietăți 69
fișa 18: Ecuații cu radicali 76
fișa 19: Ecuații exponențiale 78
fișa 20: Logaritmi 87
fișa 21: Ecuații logaritmice 90
fișa 22: Inecuații logaritmice și exponențiale 94
fișa 23: Ecuații trigonometrice 96
fișa 24: Numere complexe ℂ 105
fișa 25: Forma trigonometrică a unui număr complex 109
fișa 26: Geometrie analitică 116
fișa 27: Panta unei drepte 119
fișa 28: Poziția relativă a 2 drepte 121
fișa 29: Vectori în geometria analitică 123
fișa 30: Elemente de combinatorică 125
fișa 31: Probleme de numărare 127
fișa 32: Binomul lui Newton 129

III Clasa a XI-a:

fișa 33: Permutări 131

fișa 34: Matrice 135

fișa 35: Determinanți 141

fișa 36: Matrice inversabilă 147

fișa 37: Rangul unei matrice 149

fișa 38: Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală . . 151

fișa 39: Șiruri de numere reale 155

fișa 40: Limite de șiruri 157

fișa 41: Șiruri recurente 167

fișa 42: Limite de funcții 169

fișa 43: Limitele unor funcții elementare . . . 173

fișa 44: Asimptote 179

fișa 45: Grafice de funcții 183

fișa 46: Funcții continue 189

fișa 47: Funcții derivabile 193

fișa 48: Derivate de ordin superior 199

fișa 49: Aplicații ale derivatelor în studiul funcțiilor 201

fișa 50: Șirul lui Rolle 205

IV Clasa a XII-a:

fișa 51: Primitive 208
fișa 52: Integrarea prin părți 213
fișa 53: Metoda substituției (prima schimbare de variație) 214
fișa 54: Integrarea funcțiilor raționale 215
fișa 55: A 2a schimbare de variabilă 217
fișa 56: Legi de compoziție 219
fișa 57: Monoid. Grup 222
fișa 58: Clase de resturi în modulo n 225
fișa 59: Morfisme de grupuri 227
fișa 60: Subgrup 228
fișa 61: Grupuri finite 230
fișa 62: Inel 234
fișa 63: Corp 236
fișa 64: Proprietățiale integrării definite 237
fișa 65: Șiruri recurente pt 2 241
fișa 66: Polinoame 244
fișa 67: Divizibilitate 246
fișa 68: Ecuații reciproce 249
fișa 69: Relațiile lui Viette 250 (267)